

Ο Διδακτικός Μετασχηματισμός στη Διδασκαλία του Εμβαδού Επιπέδων Σχημάτων στο Γυμνάσιο

Φεβρουάριος
2026

Τσαμπούκα Πετρούλα
ΣΕ Μαθηματικών Δυτικής Θεσσαλονίκης

ΘΕΩΡΙΕΣ ΜΑΘΗΣΗΣ

Συμπεριφορισμός

- Η μάθηση είναι πιο αποτελεσματική όταν ο μαθητής συμμετέχει ενεργά σ' αυτή.

Σχολή Gestalt

- Η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων βελτιώνεται με την εξάσκηση της οπτικής αντίληψης των μαθητών, δηλαδή την ικανότητα να βλέπουν σχηματισμούς και όχι μεμονωμένα στοιχεία.

Πείραμα του Wertheimer(1)

1^η ομάδα μαθητών

- Διδάχθηκαν απλώς τον τύπο υπολογισμού του εμβαδού του παρ/γράμμου σε σχέση με το παρακάτω παρ/γραμμο



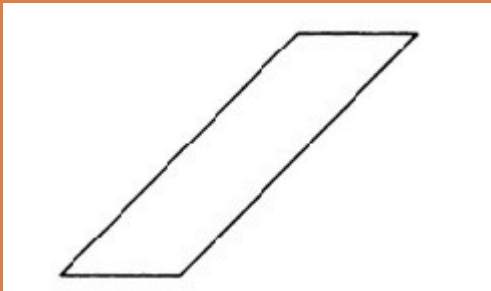
2^η ομάδα μαθητών

- Κατέληξαν στον τύπο υπολογισμού του εμβαδού του μέσα από μια διαδικασία οπτικοποίησης του αποτελέσματος και ανακάλυψης συσχετισμών



Πείραμα του Wertheimer(2)

Ζητήθηκε και από τις 2 ομάδες να υπολογίσουν το εμβαδόν στα παρ/γραμμά



1^η ομάδα μαθητών

Υπολόγισε σωστά το εμβαδόν του πρώτου παρ/γράμμου –απέτυχε στο δεύτερο.

2^η ομάδα μαθητών

Υπολόγισε σωστά το εμβαδόν και στα δύο παρ/γραμμά.

Η Θεωρία του Dienes

- ❑ Οι συγκεκριμένες εμπειρίες που αποκτούν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας είναι αναγκαίες για τη μάθηση
- ❑ Οι εμπειρίες προσφέρονται μέσα από μια κατάλληλα σχεδιασμένη διδασκαλία
- ❑ Η αναφορά σε αφηρημένες οντότητες και χρήση ακατάλληλων συμβολισμών είναι πιθανόν να αποθαρρύνουν και να αποπροσανατολίσουν τους μαθητές

Διδακτικός Μετασχηματισμός ή Διδακτική Μετατόπιση

- Τροποποίηση των μαθηματικών εννοιών που πρέπει να διδαχθούν ώστε να καταστούν κατάλληλες για το επίπεδο των μαθητών μιας τάξης.
- Μεταφορά στις σχολικές αίθουσες της γνώσης που παράγεται έξω από το σχολικό πλαίσιο.
- Το σύνολο των παρεμβάσεων και διαμορφώσεων που γίνονται στην επιστημονική γνώση

Για το διδακτικό μετασχηματισμό

Επιλογή γνωστικού
περιεχομένου

Μηχανισμός
κατασκευής νέας
γνώσης

Οργάνωση του
υλικού

- Θα πρέπει να του προσδίδεται κοινωνική αποδοχή και νομιμοποίηση.
- Θα πρέπει να είναι μέρος ενός οργανωμένου συνόλου.
- Στο σχολικό περιβάλλον δεν είναι εμφανής.
- Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται με διαφορετική σειρά από αυτήν που ανακαλύφθηκαν
- Απουσία ενδιάμεσων συλλογισμών και επιχειρηματολογίας
- Παρουσίαση εννοιών χωρίς να δίνονται οι λόγοι που οδήγησαν στην ανακάλυψη τους αλλά και οι σκοποί που εξυπηρετούν

Διαδικασία εκτέλεσης του διδακτικού μετασχηματισμού

1^η φάση-

Εξωτερικός μετασχηματισμός

Επιλογή θεμάτων από το σώμα επιστημονικής γνώσης ώστε να διαμορφωθούν διδακτικά κείμενα, να συνταχθούν αναλυτικά προγράμματα και να συγγραφούν κείμενα οδηγιών προς τους διδάσκοντες

Συντελείται από: “νοόσφαιρα”, δηλ. θεσμικές αρχές, ερευνητές, συγγραφείς αναλυτικών προγραμμάτων και σχολικών βιβλίων

2^η φάση-

Εσωτερικός μετασχηματισμός

Τα προϊόντα της πρώτης φάσης δέχονται δοκιμασίες και υπόκεινται σε τροποποιήσεις στην σχολική αίθουσα

Συντελείται από : την αλληλεπίδραση εκπαιδευτικών και μαθητών

Διαφοροποιείται : ανάλογα με το υπόβαθρο των μαθητών και τις αντιλήψεις του διδάσκοντα

Διαδικασία επιτυχημένης μεταφοράς της νέας γνώσης (1)

- ❑ Οι έννοιες που διδάσκονται χαρακτηρίζονται από γενικότητα, δηλαδή αφαιρούνται οι ειδικές συνθήκες που ισχύουν κατά τη λειτουργία του φαινομένου (**αποπλαισίωση κατά τον Brousseau**)
- ❑ Οι μαθητές εντάσσουν την έννοια σε μια κατάσταση για να ελέγξουν πως λειτουργεί, δηλαδή τη θέτουν σε εφαρμογή σε ένα ειδικό πλαίσιο (**επαναπλαισίωση**)
- ❑ Για να καταστεί η έννοια πραγματικό νοητικό εργαλείο θα πρέπει να κατανοηθεί ανεξάρτητα από τις ειδικές συνθήκες που της έδωσαν νόημα (**αποπλαισίωση**)

Διαδικασία επιτυχημένης μεταφοράς της νέας γνώσης (2)

- Κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών οι έννοιες εμφανίζονται κατά κύριο λόγο ως **εργαλεία** για την επίλυση προβλημάτων (**Douady**)

π.χ. Το σύνολο κάποιων αντικειμένων προκύπτει από την άθροιση αριθμών

- Η επαναλαμβανόμενη χρήση αυτών των εννοιών δημιουργεί μια οικειότητα και οδηγεί σιγά σιγά σε αποκάλυψη της συνεισφοράς τους στην προσέγγιση και αιτιολόγηση της λύσης.
- Τελικά οδηγούμαστε στο **μετασχηματισμό των εργαλείων** σε αφηρημένα αντικείμενα

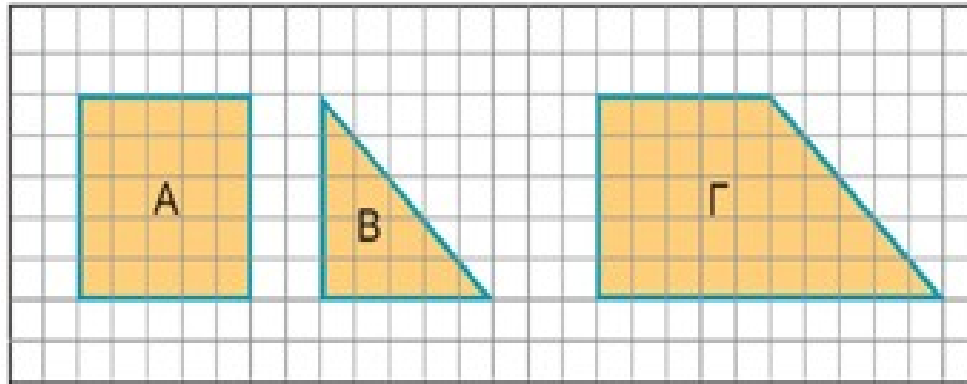
π.χ. Από την άθροιση αριθμών καταλήγουμε στην:

- ❖ Αθροιστική ιδιότητα πληθικότητας για ένωση 2 ξένων πεπερασμένων και αριθμήσιμων συνόλων
- ❖ Αθροιστική ιδιότητα στον υπολογισμό εμβαδών σύνθετων σχημάτων
- ❖ Αθροιστική ιδιότητα στον όγκο στερεών που κατασκευάζονται από πιο απλά στερεά.

Διαδικασία επιτυχημένης μεταφοράς της νέας γνώσης (3)

- ❑ Οι **αναλλοίωτες** είναι μία σταθερή αλληλουχία σταδίων από τα οποία περνάει ένα άτομο κατά την κατασκευή των νοητικών του αναπαραστάσεων (**Piaget**)
- ❑ Κατά τη γνωστική διαδικασία η **εσωτερική νοητική αναπαράσταση** του εξωτερικού κόσμου αποκαλούμενη ως **σχήμα (schema)** υφίσταται δύο στάδια αλλαγών
- ❑ Το πρώτο στάδιο είναι η **αφομοίωση (assimilation)** ενώ το δεύτερο στάδιο είναι η **συμμόρφωση (accommodation)**.
- ❑ Ο Piaget δε λαμβάνει υπόψη τις **συσχετιστικές αναλλοίωτες (Vergnaud)**, δηλαδή σχέσεις που παραμένουν αμετάβλητες κάτω από ορισμένο σύνολο μετασχηματισμών ή μεταβολών.
 - ❖ Πληθικότητα ενός συνόλου αν αναδιατάξω τα στοιχεία του
 - ❖ Όγκος ενός στερεού αν μεταβάλλω το σχήμα του
- ❑ Ο Vergnaud αποκαλεί τις τεχνικές επίλυσης των προβλημάτων **θεωρήματα στην πράξη (theorems in action)** τα οποία δεν είναι τίποτα άλλο παρά οι συσχετιστικές αναλλοίωτες.

Η περίπτωση του υπολογισμού του εμβαδού επίπεδων σχημάτων στο βιβλίο της Β' Γυμνασίου



Δραστηριότητες υπολογισμού του εμβαδού επιπέδων σχημάτων χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης το εμβαδόν τετραγώνου με μήκος πλευράς μια μονάδας.

Στοιχεία της θεωρίας μέτρου

Μήκος διαστήματος $I = (a, b)$ είναι ο θετικός αριθμός $l(I) = b - a$

Για I μη φραγμένο διάστημα τότε $l(I) = \infty$ ενώ $l(\emptyset) = 0$

Η l είναι μια συνολοσυνάρτηση με πεδίο ορισμού διαστήματα και πεδίο τιμών το $[0, +\infty]$ (Η γραμμή των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών επεκτείνεται και με το άπειρο.)

Για υποσύνολα της μορφής $A = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ ορίζουμε $l(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$

Εφοδιάζοντας την l με ορισμένες ιδιότητες παίρνουμε τη συνάρτηση μέτρου μ για την οποία ισχύουν:

Ιδιότητες της συνάρτησης μέτρου

- 1) Η μ ορίζεται για κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$
- 2) Για κάθε $E \subset \mathbb{R}^2$ ισχύει $\mu(E) \geq 0$
- 3) Για κάθε υποσύνολο $A = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ ισχύει $\mu(A) = l(A)$
- 4) Αν $E_1 \subset E_2$ τότε $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$
- 5) Αν $E \subset \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ τότε $\mu(E + x) = \mu(E)$
(αμετάβλητο στη μεταφορά)
- 6) Αριθμήσιμη προσθετικότητα: Αν $E_1, E_2, \dots$ είναι το πολύ αριθμήσιμου πλήθους ξένα ανά δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$, τότε $\mu(\cup_n E_n) = \sum_n \mu(E_n)$.

Συναρτήσεις μέτρου

$\exists$ συνολοσυνάρτηση που να ικανοποιεί και τις 6 ιδιότητες;

$\exists$ συνολοσυνάρτηση που να ικανοποιεί τις (1)-(5);

$\exists$ συνολοσυνάρτηση που να ικανοποιεί τις (2)-(6);

Χαλάρωση του μέτρου Lebesgue ως προς την (6) απαιτώντας απλώς πεπερασμένη προσθετικότητα

- Δεν υπάρχει
- Εξωτερικό μέτρο Lebesgue
- Μέτρο Lebesgue
- Μέτρο Jordan

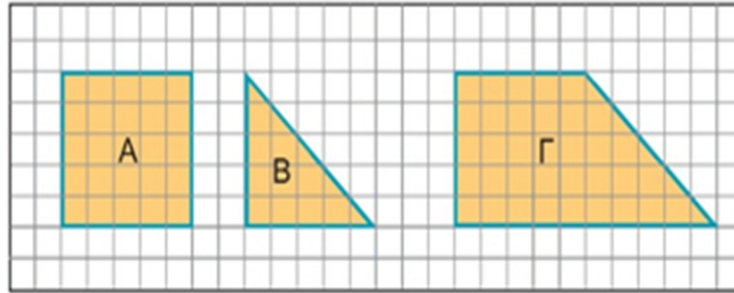
Χρήσιμο θεώρημα για τον υπολογισμό του εμβαδού σχημάτων

Θεώρημα 1: Ας θεωρήσουμε τον αναστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό $L: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ και $b \in \mathbb{R}^d$. Τότε για κάθε Jordan σύνολο $E \subset \mathbb{R}^d$ το σύνολο $LE + b = \{Lx + b: x \in E\}$ είναι Jordan και

$$\mu(LE + b) = |\det L| \mu(E).$$

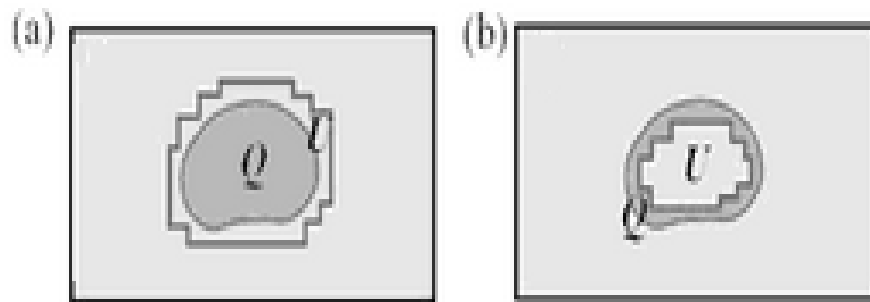
Συνέπειες Θεωρήματος: το μέτρο Jordan παραμένει αναλλοίωτο σε μετατοπίσεις, περιστροφές και κατοπτρισμούς επειδή $|\det L| = 1$.

Σύνδεση ύλης σχολικού βιβλίου με τη θεωρία μέτρου



- ❑ Το πλέγμα των οριζοντίων και των καθέτων γραμμών είναι ευθυγραμμισμένο με ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων
- ❑ Τετράγωνο με μήκος πλευράς 1 μονάδα έχει εμβαδό 1 τετραγωνική μονάδα ως απόρροια της ιδιότητας (3) για στοιχειώδη υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ με μήκος διαστήματος 1 μονάδα σε κάθε διάσταση
- ❑ Καταμέτρηση του πλήθους των τετραγώνων εφαρμόζοντας την ιδιότητα (6) που για το μέτρο Jordan μετασχηματίζεται σε πεπερασμένη προσθετικότητα.

Ορισμός μέτρου Jordan για φραγμένα χωρία



Κάθε φραγμένο χωρίο Q του $\mathbb{R}^2$ προσεγγίζεται από ενώσεις $\bar{K}$ ορθογωνίων που το υπερκαλύπτουν καθώς και από ενώσεις $\bar{K}$ που καλύπτουν το εσωτερικό του χωρίς να περιέχουν σημεία του συνόρου του.

Κάθε τέτοια ένωση ορθογωνίων ονομάζεται στοιχειώδες σύνολο.

Εξωτερικό μέτρο Jordan:

$$\mu^*(Q) \equiv \inf\{\mu(\bar{K}) \mid \bar{K} \supset Q\}$$

Εσωτερικό μέτρο Jordan:

$$\mu_*(Q) \equiv \sup\{\mu(\bar{K}) \mid \bar{K} \subset Q\}$$

Ιδιότητες του στοιχειώδους συνόλου

(Στα στοιχειώδη σύνολα ανήκουν τα ορθογώνια)

1. Πεπερασμένη προσθετικότητα

Αν έχω n ξένα μεταξύ τους στοιχειώδη σύνολα $E_1, \dots, E_n$, τότε

$$\mu(\cup_k E_k) = \sum_k \mu(E_k)$$

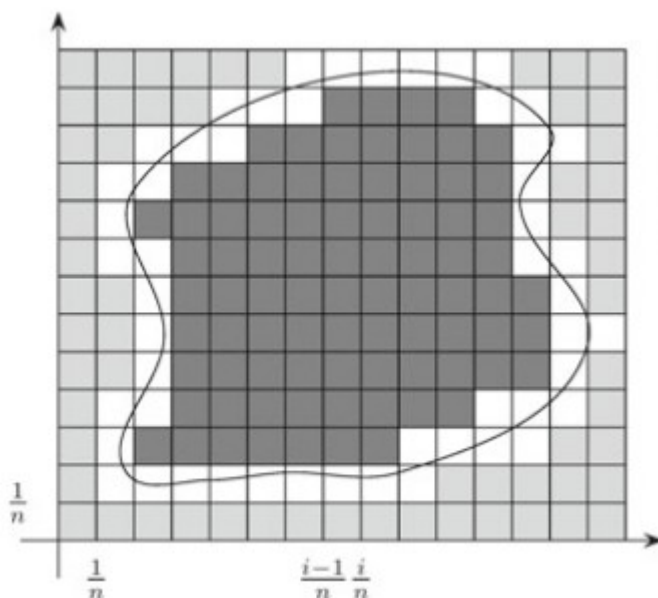
2. Πεπερασμένη υποπροσθετικότητα

Αν έχω n στοιχειώδη σύνολα $E_1, \dots, E_n$, (πιθανώς επικαλυπτόμενα) τότε

$$\mu(\cup_k E_k) \leq \sum_k \mu(E_k)$$

3. Αμετάβλητα ως προς τη μετάθεση

Αν $x \in \mathbb{R}^2$ τότε για οποιοδήποτε στοιχειώδες σύνολο $\mu(x + E) = \mu(E)$



Λαμβάνοντας λεπτότερη διαμέριση

Ορίζουμε ένα σύνολο K_n από μη επικαλυπτόμενα ορθογώνια (στοιχειώδη σύνολα) της μορφής

$$\left[\frac{i_1 - 1}{n}, \frac{i_1}{n} \right] \times \left[\frac{i_2 - 1}{n}, \frac{i_2}{n} \right]$$

με μήκος πλευράς $1/n$ όπου i_1, i_2 είναι αυθαίρετοι ακέραιοι αριθμοί.

Για το **εσωτερικό μέτρο** ισχύει $\mu_*(Q, n) = \sup_{K_n \subset Q} \mu(K_n)$

Στην περίπτωση του **εσωτερικού μέτρου** επιλέγονται στοιχεία του συνόλου K_n που είναι **μη επικαλυπτόμενα** και ανήκουν στο **εσωτερικό του χωρίου Q** (σκούρα γκρι περιοχή)

Για το εξωτερικό μέτρο ισχύει $\mu^*(Q, n) = \inf_{K_n \supset Q} \mu(K_n)$

Στην περίπτωση του εξωτερικού μέτρου επιλέγονται στοιχεία του συνόλου K_n που ανήκουν στο **εσωτερικό και περιλαμβάνουν το σύνορο του χωρίου Q** (σκούρα γκρι περιοχή και λευκή περιοχή)

Λήμμα 1: Για κάθε ορθογώνιο $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ ισχύει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_*(Q, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(Q, n) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$$

Το λήμμα γενικεύει τον υπολογισμό του εμβαδού και σε ορθογώνια που τα μήκη πλευρών μπορεί να είναι άρρητοι αριθμοί.

Ένα χωρίο $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι μετρήσιμο κατά Jordan αν:

$$Q \text{ φραγμένο και } \mu^*(Q) = \mu_*(Q)$$

Μέτρο Jordan $\mu(Q)$:

$$\mu(Q) \equiv \mu^*(Q) = \mu_*(Q)$$

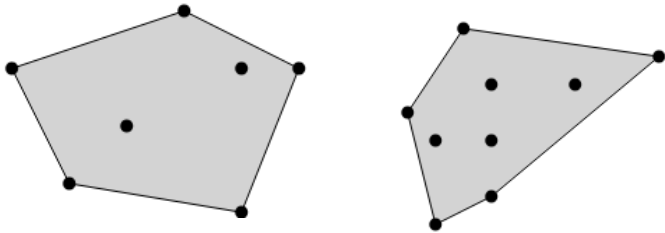
Απαραίτητη προϋπόθεση για να είναι ένα φραγμένο χωρίο μετρήσιμο κατά Jordan είναι το σύνορο του να έχει μηδενικό εξωτερικό μέτρο Jordan και επομένως μηδενικό εμβαδόν.

Θεώρημα 2: Για κάθε φραγμένο σύνολο $Q \in \mathbb{R}^2$ ισχύει

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_*(Q, n) = \mu_*(Q)$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(Q, n) = \mu^*(Q)$
3. $\mu_*(Q) \leq \mu^*(Q)$

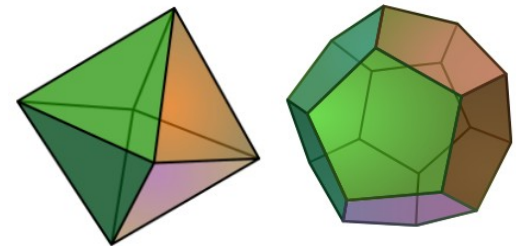
Παραδείγματα μετρήσιμων και μη μετρήσιμων κατά Jordan συνόλων στον $\mathbb{R}^2$

1. Συμπαγή (στον $\mathbb{R}^2$ κλειστά και φραγμένα σύνολα) που είναι κυρτά πολύγωνα



Η έννοια των μετρήσιμων κατά Jordan συνόλων είναι επεκτάσιμη και σε μεγαλύτερες διαστάσεις, οδηγώντας για 3 διαστάσεις στον υπολογισμό του όγκου σε κυρτά πολύτοπα.

2. Ανοιχτές και κλειστές μπάλες $B(c; r)$

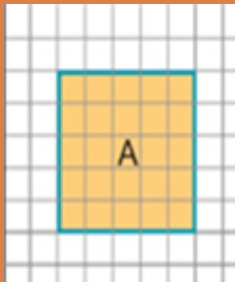


Κλασικό παράδειγμα μη μετρήσιμου κατά Jordan συνόλου
Σύνολο της μορφής $[0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ (ρητοί αριθμοί στις 2 διαστάσεις)

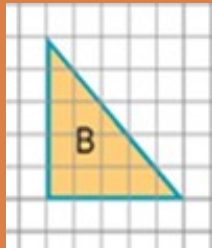
Για να γίνει καλύτερα κατανοητό περιοριζόμαστε στη μία διάσταση $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.

- Το εξωτερικό μέτρο πρέπει να καλύψει όλους του ρητούς αριθμούς στο διάστημα $[0,1]$. Επειδή οι ρητοί είναι πυκνοί (dense) στο $\mathbb{R}$, δηλ οι άρρητοι αριθμοί είναι όριο ακολουθίας ρητών, για να καλύψουμε τους ρητούς με πεπερασμένο αριθμό συνόλων θα συμπεριλάβουμε και τους άρρητους που περιέχονται μεταξύ των ρητών. Επομένως το μικρότερο σύνολο που τους καλύπτει έχει $\mu^*=1$.
- Στο εσωτερικό μέτρο επιδιώκουμε να συμπεριλάβουμε το εσωτερικό του συνόλου των ρητών το οποίο είναι κενό. Επομένως το εσωτερικό μέτρο είναι $\mu_*=0$.
- Σαν συμπέρασμα: Το σύνορο του συνόλου έχει μέτρο διάφορο του μηδενός

Προσεγγίζοντας την τιμή του εμβαδού



εσωτερικό μέτρο Jordan = εξωτερικό μέτρο Jordan = πλήθος τετραγώνων



δεν καλύπτεται πλήρως μόνο με τετράγωνα

προσέγγιση **από κάτω** της τιμής του εμβαδού: 10 τετ. μον.

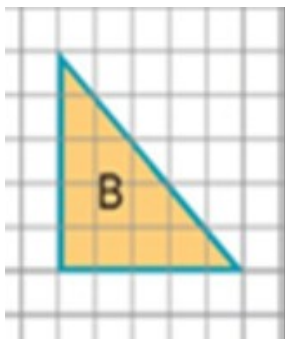
προσέγγιση **από πάνω** της τιμής του εμβαδού: 15 τετ. μον.

εσωτερικό μέτρο Jordan < εξωτερικό μέτρο Jordan

Βρίσκοντας την τιμή του εμβαδού

Παρατήρηση: δύο από τα μικρά τρίγωνα που διατάσσονται κατά μήκος της υποτείνουσας συμπληρώνουν ένα ολόκληρο τετράγωνο

πιο εκλεπτυσμένη προσέγγιση χρησιμοποιώντας
ακέραιο αριθμό τετραγώνων: $12 < \text{τιμή του εμβαδού} < 13$



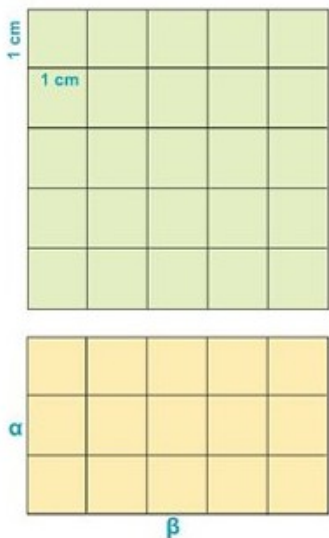
Ένα μικρό τρίγωνο έχει το μισό του εμβαδού ενός τετραγώνου.

Τα τρίγωνα που αποτελούν ένα τετράγωνο είναι το ένα κατοπτρισμός του άλλου $\Rightarrow$ τα δύο τρίγωνα έχουν το ίδιο μέτρο

Λόγω της πεπερασμένης προσθετικότητας του μέτρου Jordan το μέτρο της ένωσης τους ισούται με το μέτρο του τετραγώνου.

εσωτερικό μέτρο Jordan = εξωτερικό μέτρο Jordan = μέτρο Jordan = 12.5 τετ. μον.

Υπολογισμός εμβαδού χωρίς χρήση του πλέγματος τετραγώνων



Το εμβαδόν των σχημάτων προκύπτει καταμετρώντας το πλήθος των τετραγώνων

Μία οριζόντια πλευρά του περιλαμβάνει τόσα τετράγωνα όσα και το μήκος της

Μία κατακόρυφη πλευρά μπορεί να διαιρεθεί σε τόσες γραμμές μικρών τετραγώνων όσο το μήκος της

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

Το εμβαδό ενός τετραγώνου πλευράς a είναι a^2 .

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με πλευρές a και b είναι $a \cdot b$.

Επέκταση στην περίπτωση που το μήκος μιας πλευράς είναι δεκαδικός αριθμός (Ακολουθείται η λογική της απόδειξης του λήμματος 1)

- Δε γίνεται αναφορά στο βιβλίο μιας τέτοιας περίπτωσης, αλλά θεωρείται σιωπηρά ότι ισχύει ο ίδιος τύπος υπολογισμού του εμβαδού τετραγώνου ή ορθογωνίου.

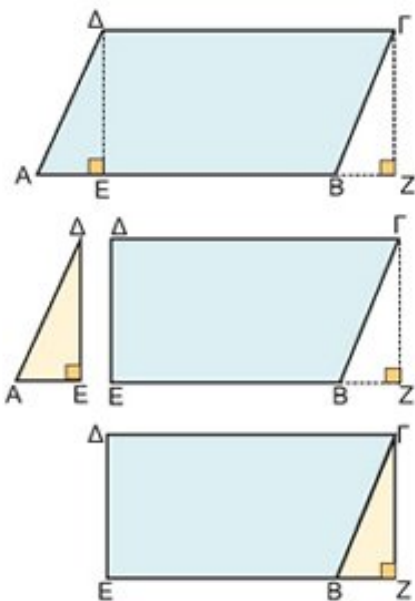
Έστω ότι θεωρούμε τετράγωνο με μήκος πλευράς 9,65 cm

- Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το τετράγωνο μας τοποθετείται σε ένα εικονικό καρτεσιανό επίπεδο έτσι ώστε οι 2 πλευρές του να εφάπτονται στο σύστημα αξόνων
- Καταφεύγουμε σε λεπτότερη διαμέριση από μη επικαλυπτόμενα τετράγωνα της μορφής $\left[\frac{0}{100}, \frac{1}{100}\right] \times \left[\frac{0}{100}, \frac{1}{100}\right], \left[\frac{1}{100}, \frac{2}{100}\right] \times \left[\frac{0}{100}, \frac{1}{100}\right], \dots$
- Κάθε στοιχειώδες σύνολο A του $\mathbb{R}^2$ έχει $l(A) = \alpha \xi \alpha^2 = 0,01^2$
- Σύμφωνα με την ιδιότητα (3) του μέτρου $\mu(A) = l(A) = 0,01^2$
- Η μία πλευρά μπορεί να διαιρεθεί σε τμήματα μήκους 0,01 δημιουργώντας μία σειρά από 965 μικρά τετράγωνα με μέτρο $\mu(A) = 0,01^2$
- Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι το γινόμενο του πλήθους των μικρών τετραγώνων στα οποία διαιρείται με το μέτρο κάθε μικρού τετραγώνου, δηλ. $965 \cdot 965 \cdot \mu(A) = 965^2 \cdot 0,01^2 = 9,65^2 cm^2$

Υπολογισμός του εμβαδού παραλληλογράμμου

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

Αναφορά στις ιδιότητες του παραλληλογράμμου
Απέναντι πλευρές ίσες ----- $AB = \Delta\Gamma$ και $AD = B\Gamma$



Αναφορά στην έννοια του ύψους και ότι διατηρείται σταθερό ανεξάρτητα από το σημείο που θα το φέρω.

Ερ. Γιατί συμβαίνει αυτό;

Απ. Λόγω της παραλληλίας των πλευρών $\Gamma\Delta$ και AB .

Ερ. Θα μπορούσα να φέρω το ύψος μεταξύ άλλων πλευρών;

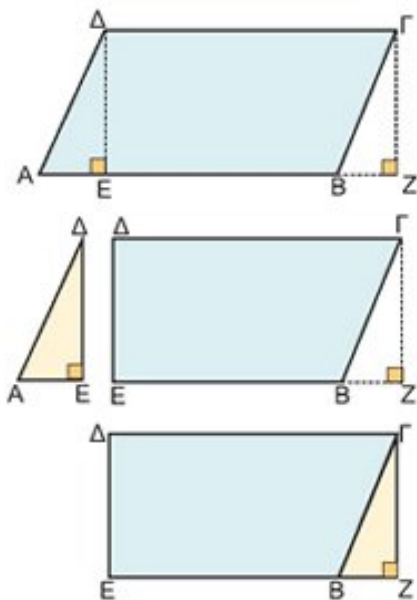
Απ. Μεταξύ των $A\Delta$ και $B\Gamma$

Προκύπτει ο τεμαχισμός του εμβαδού σε δύο τμήματα με τη βοήθεια του ύψους.

Λόγω της πεπερασμένης προσθετικότητας το μέτρο του χωρίου $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των $A\Delta E$ και $\Delta\Gamma B E$.

Υπολογισμός του εμβαδού παραλληλογράμμου

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΛΕΥΡΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ



- Φέρουμε το ύψος από την κορυφή Δ. Αποκόπτουμε το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται.
- Φέρουμε το ύψος από την κορυφή Γ.

Τι είδους σχήμα είναι το ΓΔΕΒ; Ορθογώνιο

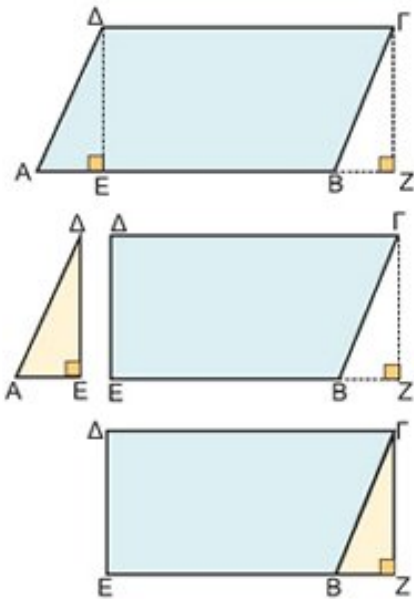
Μπορώ να καλύψω επακριβώς την επιφάνεια ΒΓΖ με το τρίγωνο ΑΔΕ;

Τι παρατηρώ στα 2 τρίγωνα που με οδηγούν στην παραπάνω υπόθεση; Πρώιμη αναφορά στην ισότητα αφού η διαπραγμάτευση θα γίνει στην επόμενη τάξη

1. $\triangle ADE$ και $\triangle BGF$ ορθογώνια
2. $AD=BF$ ως απέναντι πλευρές του παρ/γράμμου
3. $DE=GF$ ως ύψη

Υπολογισμός του εμβαδού παραλληλογράμμου

ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ:



Το μέτρο του $B\Gamma Z$ είναι ίσο με το μέτρο του ΔE αφού το ένα είναι οριζόντια μετατόπιση του άλλου.

Καταλήγουμε σε ένα χωρίο που είναι ορθογώνιο.

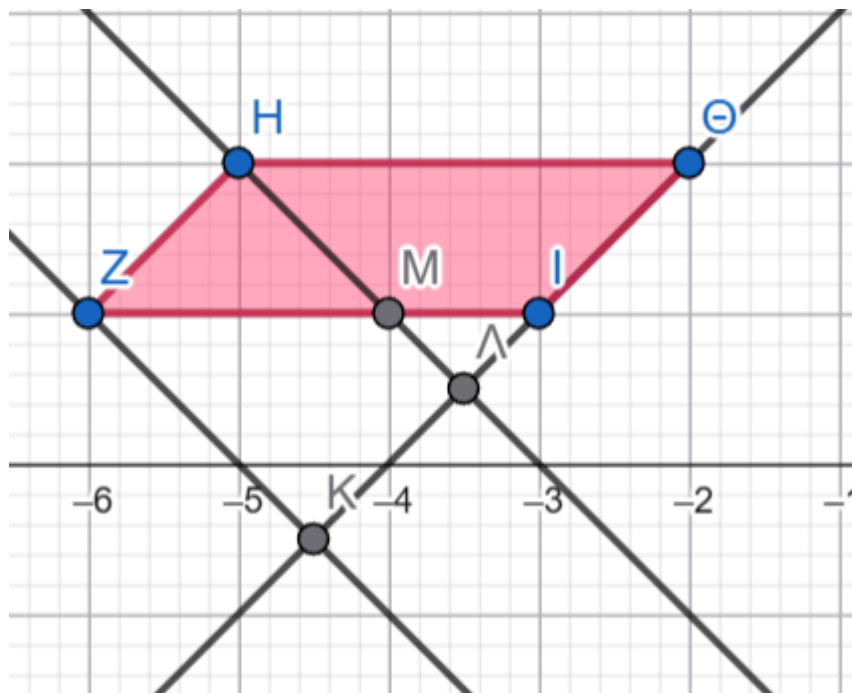
Το ορθογώνιο έχει μήκος οριζόντιας πλευράς ίσο με του παρ/γράμμου και μήκος κάθετης ίσο με το ύψος του παρ/γράμμου

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο μίας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.

Υπολογισμός του εμβαδού παραλληλογράμμου

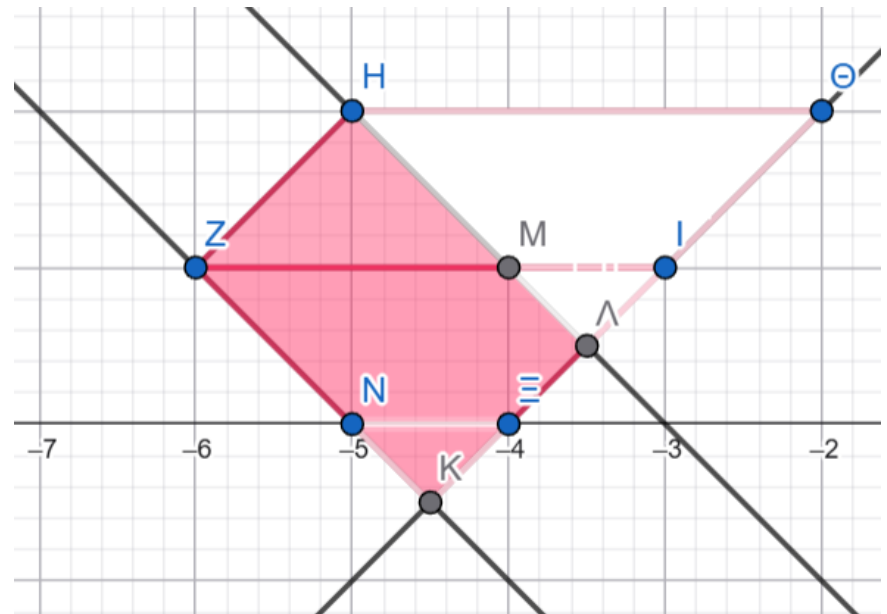
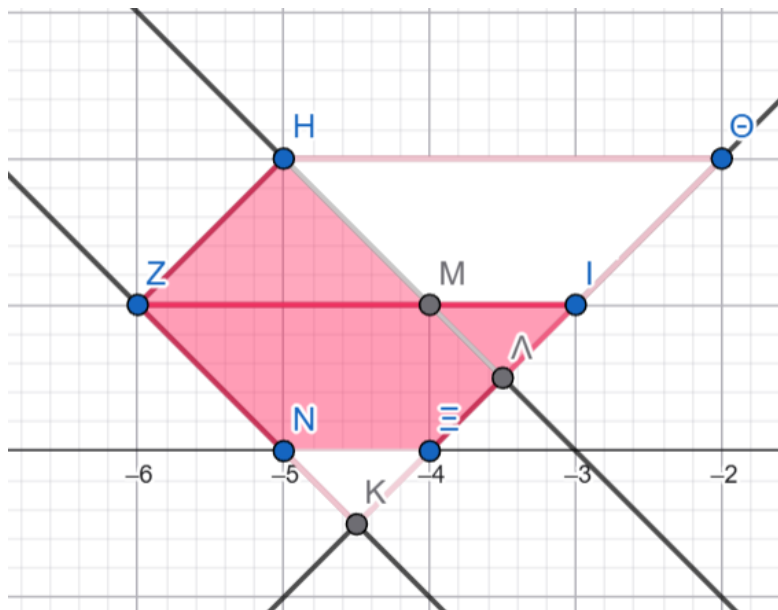
Συμπεράσμα: Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο μίας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.



1. Ερ. Αν επιλέξουμε ως βάση το HZ και ύψος το ZK το εμβαδό του παρ/γράμμου με το εμβαδό ποιου ορθογωνίου ισούται;
Απ. HZKL
2. Ερ. Με ποιο τμήμα της ροζ περιοχής πρέπει να συμπληρώσουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου;
Απ. HΘMI
3. Ερ. Ποια τρίγωνα θεωρείτε ότι είναι ίσα στο σχήμα και γιατί;
Απ. ZIK και HΛΘ

Υπολογισμός του εμβαδού παραλληλογράμμου

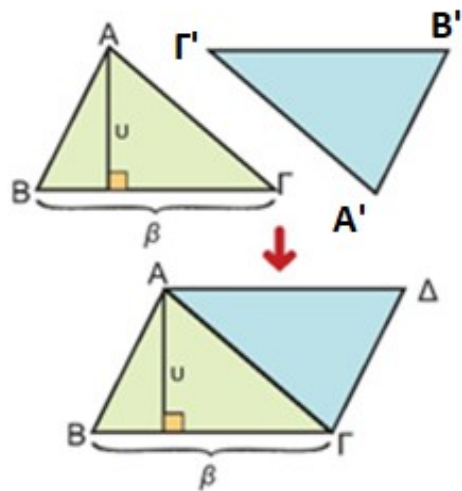
Συμπεράσμα: Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο μίας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.



4. Ερ. Ποια τρίγωνα είναι ίσα στο παραπάνω σχήμα;

Απ. ΜΙΛ και ΝΕΚ

Υπολογισμός του εμβαδού τυχαίου τριγώνου



Παίρνουμε ένα αντίγραφο του αρχικού τριγώνου το οποίο περιστρέφουμε κατά 180° .

Κάτω από ένα μετασχηματισμό στροφής το μέτρο του χωρίου παραμένει αναλλοίωτο.

Μεταφέρουμε το τρίγωνο $A'B'Γ'$ ώστε η πλευρά $Γ'A'$ να συμπέσει με την $AΓ$ του αρχικού.

Προκύπτει λόγω ισότητας γωνιών ότι το τετράπλευρο $ABΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λόγω της ιδιότητας της πεπερασμένης προσθετικότητας το τελικό σχήμα θα έχει διπλάσιο εμβαδό σε σχέση με το αρχικό τρίγωνο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

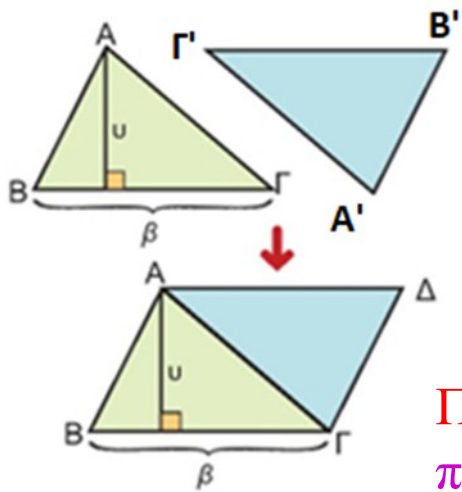
Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου μιας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.

Η προσέγγιση του σχολικού βιβλίου

Η προσέγγιση που ακολουθείται είναι διαισθητική.

Στροφή αντιγράφου του αρχικού τριγώνου και μεταφορά του ώστε να συμπέσουν οι κατάλληλες πλευρές.

Το σχήμα που προκύπτει είναι παρ/γραμμο.



Παρατήρηση: Στο σχολικό βιβλίο δεν αιτιολογείται γιατί είναι παραλληλόγραμμο.

$\Gamma = \Gamma'$ Γ, Γ' έχουν σχέση εντός και εναλλάξ

Επομένως $A\Delta$ παράλληλη στη $B\Gamma$.

Αντίστοιχα:

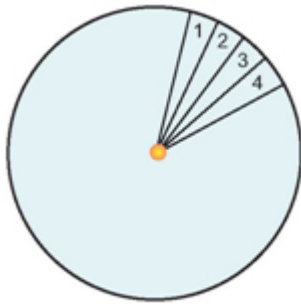
$A = A'$ A, A' έχουν σχέση εντός και εναλλάξ

Επομένως AB παράλληλη στη $\Gamma\Delta$.

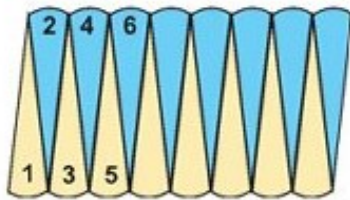
Υπολογισμός εμβαδού κύκλου

Η προσέγγιση του σχολικού βιβλίου

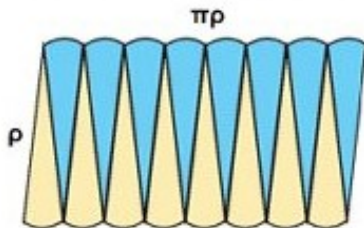
Το μήκος τόξου θεωρείται γνωστό και δίνεται κατ' ευθείαν μέσω τύπου.



Διαχωρισμός του κυκλικού δίσκου σε τριγωνικές περιοχές



Προκύπτει με αναδιάταξη των τριγωνικών περιοχών

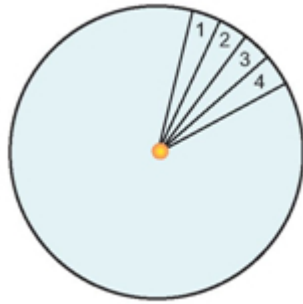


Καθώς εγγράφουμε πολύγωνα με μεγαλύτερο πλήθος πλευρών το σχήμα προσεγγίζει ένα ορθογώνιο

Μήκος μεγάλης πλευράς ορθογωνίου: $\pi\rho$

Μήκος της μικρής πλευράς: ρ

Εναλλακτική προσέγγιση του υπολογισμού του εμβαδού κύκλου



Στο όριο που ο αριθμός n των πλευρών του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου γίνει πολύ μεγάλος το εμβαδό ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των ισοσκελών τριγωνικών περιοχών της εικόνας

$$E_{\text{τριγωνικής περιοχής}} = \frac{1}{2} \text{βάση} \cdot \text{ύψος}$$

βάση = μήκος πλευράς κανονικού πολυγώνου

Καθώς $n \rightarrow \infty$

βάση τριγώνου $\rightarrow$ μήκος του αντίστοιχου τόξου

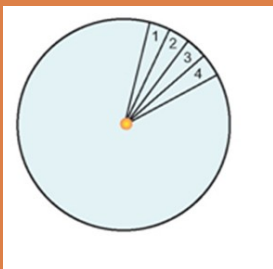
το αντίστοιχο ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $\rightarrow \rho$

εμβαδόν του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου $\rightarrow \frac{1}{2} \rho \cdot \text{περιμετρος}$,

όπου **περίμετρος** $\rightarrow 2\pi\rho$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: $E_{\text{κύκλου}} = \frac{1}{2} \rho \cdot 2\pi\rho = \pi\rho^2$

Συσχετισμοί με τον ολοκληρωτικό λογισμό



ΘΕΩΡΗΜΑ:

Ένα χωρίο $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι μετρήσιμο κατά Jordan αν και μόνο αν η χαρακτηριστική του συνάρτηση

$$\chi_Q = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann με μέτρο Jordan

$$\mu(Q) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_Q$$

Σε πιο αυστηρά μαθηματικά:

Έστω du το μήκος της χορδής
Το άθροισμα των εμβαδών των στοιχειωδών
τριγώνων ισοδυναμεί με

$$E_1 = \int_0^{2\pi\rho} \frac{1}{2}\rho \, du = \left[\frac{1}{2}\rho u \right]_0^{2\pi\rho} = \pi\rho^2$$

Διπλό ολοκλήρωμα Riemann της χαρακτηριστικής
συνάρτησης του κυκλικού χωρίου

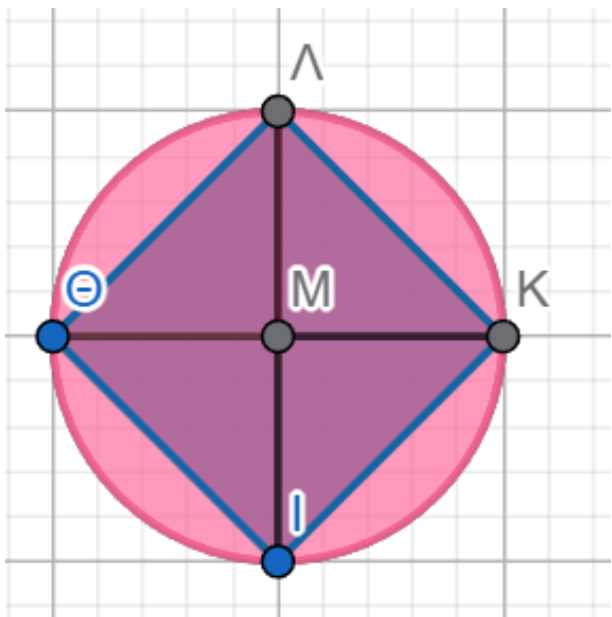
$$E_2 = \iint_S 1 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\rho r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$$

Για $du = \rho d\theta$ καταλήγουμε ότι

$$E_1 = E_2$$

Ευκαιρία για ανάδειξη της οριακής διαδικασίας

Εγγράφουμε στον κύκλο ένα τετράγωνο.



Άσκηση: Να υπολογίσετε μια προσέγγιση του εμβαδού του κύκλου αν η ακτίνα του είναι 2εκ.

Για τον υπολογισμό της πλευράς του τετραγώνου εφαρμογή του Πυθαγορείου. $ΛΚ=2\sqrt{2}$.

Για τον υπολογισμό του ύψους στο ισοσκελές τρίγωνο $ΛΚΜ$ εφαρμογή του Πυθαγόρειου Θεώρ. $Ύψος = \sqrt{2}$ εκ (Θα παρακολουθήσουμε την εξέλιξη του ύψους καθώς εγγράφουμε πολύγωνα με μεγαλύτερο πλήθος πλευρών)

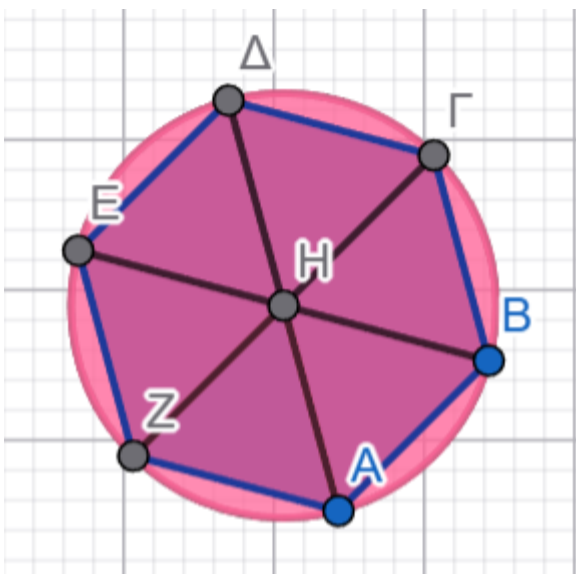
Απ: $E = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8 \text{ τ. εκ.}$

Ερ. Ποια είναι η σχέση του εμβαδού που βρήκατε με το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου; Είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο;

Ερ. Που οφείλεται η διαφορά με βάση το σχήμα που βλέπετε;

Ευκαιρία για ανάδειξη της οριακής διαδικασίας

Εγγράφουμε στον κύκλο ένα κανονικό εξάγωνο.
Τα τρίγωνα που σχηματίζονται είναι ισόπλευρα.



Άσκηση: Να υπολογίσετε μια προσέγγιση του εμβαδού του κύκλου αν η ακτίνα του είναι 2εκ.

Για τον υπολογισμό του ύψους σε ένα τρίγωνο μπορούν να χρησιμοποιήσουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Ύψος = $\sqrt{3}$ εκ (Η τιμή του ύψους αυξήθηκε σε σχέση με την περίπτωση του εγγεγραμμένου τετραγώνου)

Απ: $E = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ τ.εκ.

Ερ. Σε ποια τιμή πιστεύετε ότι θα πλησιάσει το ύψος αν εγγράψουμε n -πολύγωνο με n που γίνεται πολύ μεγάλο (τείνει στο άπειρο);

Ερ. Ποια είναι η σχέση του εμβαδού που βρήκατε με το εμβαδό στην περίπτωση του εγγεγραμμένου τετραγώνου; Γιατί προέκυψε η μεταβολή αυτή;

Ερ. Τι πιστεύετε ότι θα συμβεί στο εμβαδό στην περίπτωση που εγγράψουμε πολύγωνο με περισσότερες πλευρές; (π.χ. δωδεκάγωνο)

Η γεωμετρική προσέγγιση στον υπολογισμό του εμβαδού

□ Παρατηρήσεις

- Σε σημαντικό βαθμό έχει επικρατήσει η αλγεβρική μέθοδος για τον υπολογισμό των εμβαδών με τη χρήση των γνωστών τύπων
- Η Ευκλείδεια γεωμετρία δίνει έμφαση στη σύγκριση 2 σχημάτων χρησιμοποιώντας ως εργαλείο την επικάλυψη (“επίθεσις”). Τη διαδικασία τη συναντούμε στη σύγκριση τριγώνων.
- Για το σκοπό αυτό μπορούμε να επικαλύψουμε την περιοχή που θέλουμε να μετρήσουμε με σχήματα τα οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως μονάδες μέτρησης, π.χ. το τετράγωνο με πλευρά 1 τ.μ.
- Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη μετάβαση από τη μέτρηση του μήκους στη μέτρηση του εμβαδού. Το μήκος μπορεί να μετρηθεί ευθέως με έναν χάρακα. Η μέτρηση του εμβαδού μιας περιοχής γίνεται έμμεσα μέσα από τα μήκη που υπεισέρχονται στους τύπους υπολογισμού των εμβαδών.

Τρόποι προσέγγισης της διδασκαλίας ισότητας-ανισότητας εμβαδού επιπέδων σχημάτων

Αρχικά μέσω μετασχηματισμών (μετάθεση, στροφή, κατοπτρισμός)



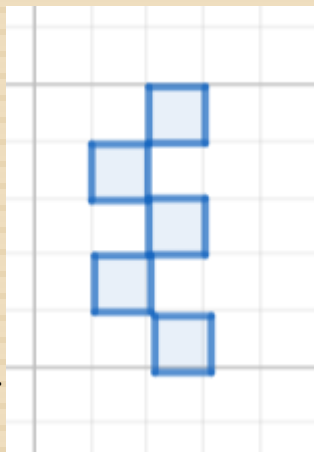
Στροφή



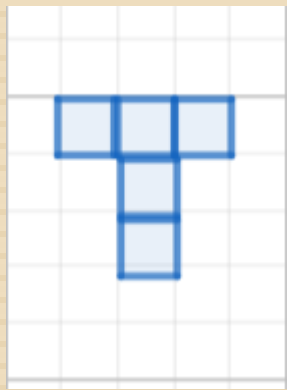
Κατοπτρισμός

Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι 2 σχήματα καταλαμβάνουν την ίδια περιοχή αρκεί να αποδείξουμε ότι διασπώντας το αρχικό σχήμα σε τμήματα και επανακατασκευάζοντάς το θα καταλήξουμε στο 2^ο σχήμα.

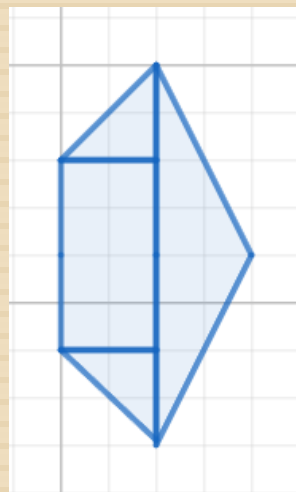
Να ελέγξετε την ισότητα των εμβαδών χωρίς να μετρήσετε κουτάκια αλλά μόνο με αναδιάταξη σχημάτων.



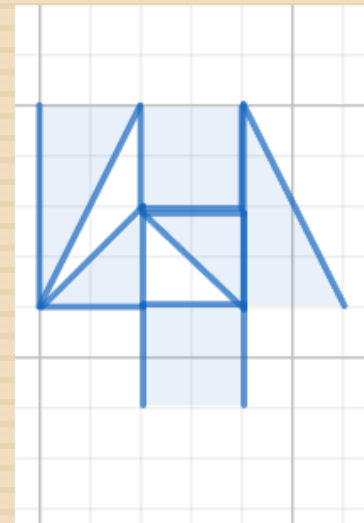
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 1

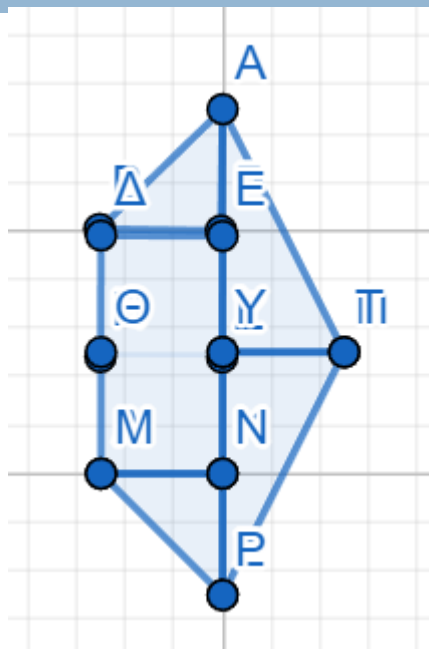


Σχήμα 2

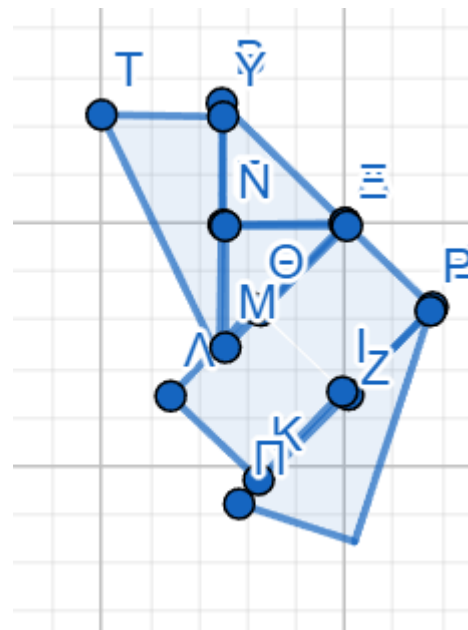
Το ίδιο μπορεί να γίνει και μέσα από μεταθέσεις χρησιμοποιώντας την εφαρμογή της geogebra

Μπορούμε να σχηματίζουμε με το ποντίκι μια ορθογώνια περιοχή στο περιβάλλον της geogebra για να επιλέξουμε περισσότερα από ένα αντικείμενα.

Μπορούμε με μεταθέσεις να καταλήξουμε από το Σχήμα 1 στο Σχήμα 2;



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Χρησιμοποιούμε το εργαλείο

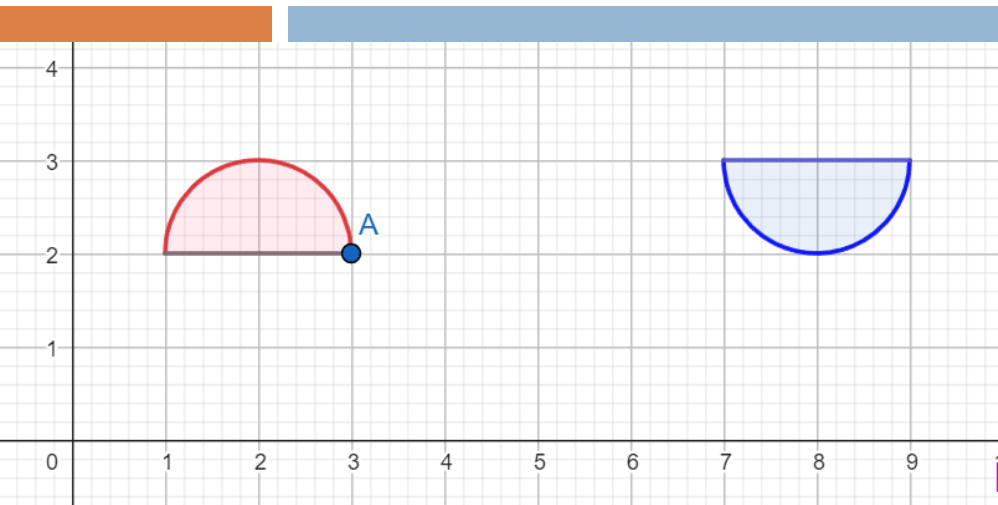


της geogebra για να δημιουργούμε

πολύγωνα τα οποία μπορούν να περιστρέφονται ως προς μία κορυφή τους.

Πειραματισμοί με τους μετασχηματισμούς της στροφής και της μετάθεσης

Πώς μπορούμε από το Σχήμα 1 να καταλήξουμε μόνο με στροφή και μετάθεση στο Σχήμα 2;



Η στροφή πραγματοποιείται ως προς σημείο.

Ο ροζ κυκλικός τομέας (εκτός από τα εργαλεία της **geogebra**) μπορεί να δημιουργηθεί και με συναρτήσεις

$$f(x) = 2 + A \sqrt{1 - (x - 2)^2} \quad (x > 0)$$

$$g(x) = 2, \quad (1 \leq x \leq 3)$$

Μπορούμε να χρωμάτισουμε την περιοχή μόνο αν οι καμπύλες έχουν οριστεί μέσα από συναρτήσεις.

Για χρωματισμό: `IntegralBetween(f,g,1,3)`

Το αντικείμενο που θέλουμε να περιστρέψουμε είναι σύνθετο καθώς ορίζεται από τις συναρτήσεις f και g . Για να πραγματοποιήσουμε περιστροφή του αντικειμένου κατά τη θετική φορά (ανθρωπολογικά), π.χ. 90° γύρω από το σημείο A , θα δώσουμε την εντολή

`Rotate({f,g}, 90°, A)`

Για να δηλώσουμε μοίρες στη **geogebra** και να εμφανιστεί το σχετικό σύμβολο γράφουμε **deg** μετά τον αριθμό. Αν δεν ακολουθήσει το deg προϋποθέτει ότι το όρισμα είναι ακτίνια.

Σενάριο 1

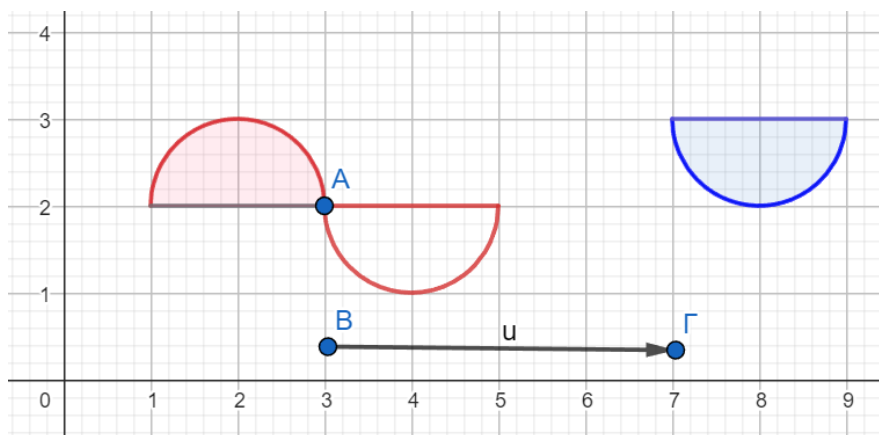
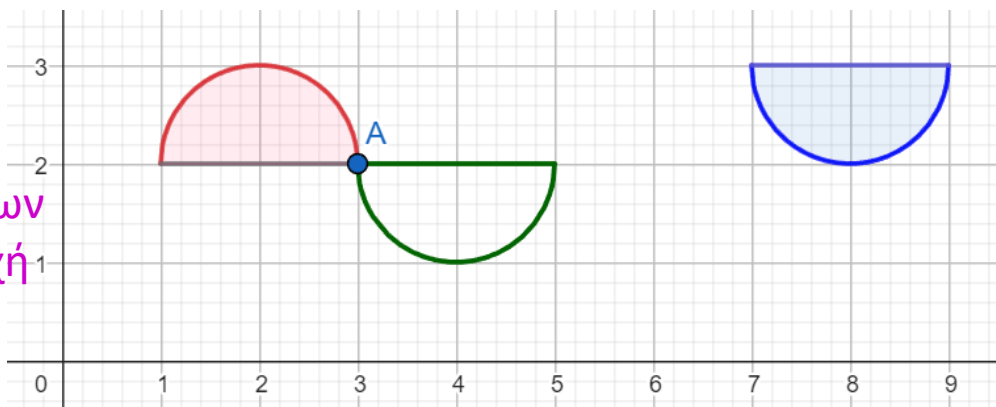
Στροφή ως προς το σημείο A κατά 180° αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού.

$Rotate(\{f, g\}, 180^\circ, A)$

Ακολουθεί ο μετασχηματισμός της μετάθεσης

Στη συνέχεια δηλώνουμε πόσο θέλουμε να μετακινηθεί στην οριζόντια διεύθυνση σημειώνοντας το με ένα διάνυσμα.

(Η επιλογή ενός ή περισσότερων αντικειμένων μπορεί να γίνει ορίζοντας ορθογώνια περιοχή που το περικλείει.)

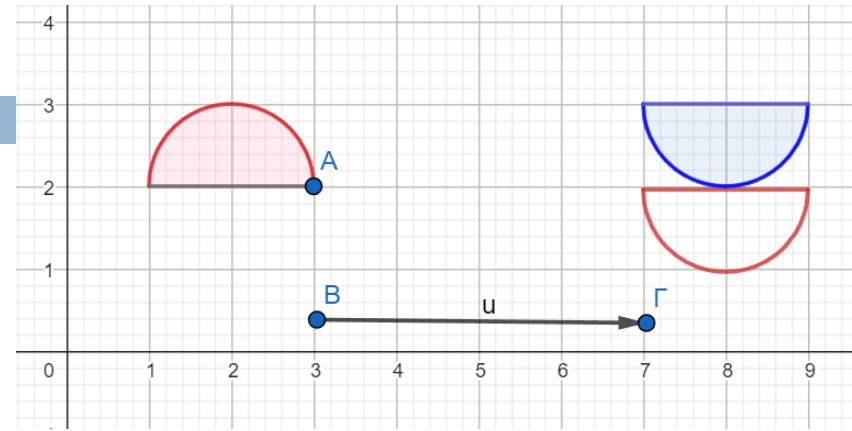
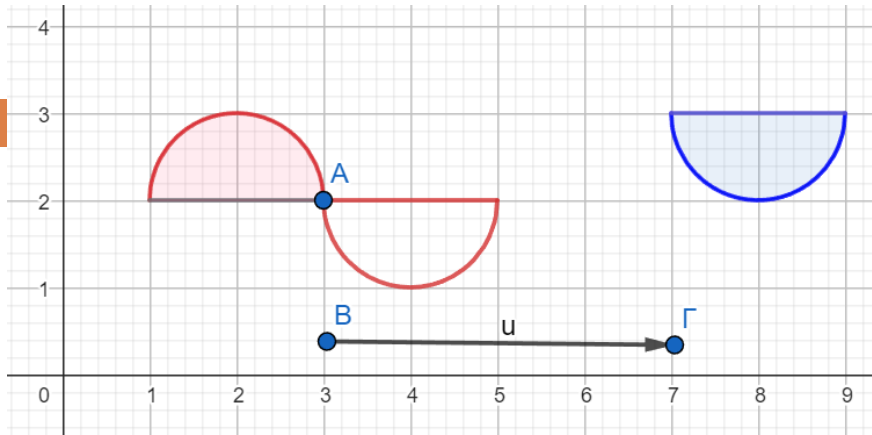


Θα χρησιμοποιήσουμε το εργαλείο για να μεταθέσουμε το σχήμα οριζόντια σε μήκος που καθορίζεται από το διάνυσμα $\vec{u}$.

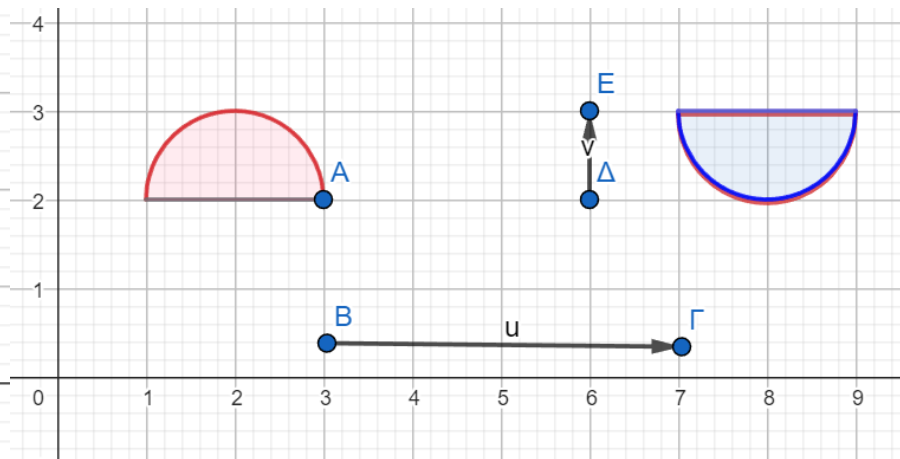
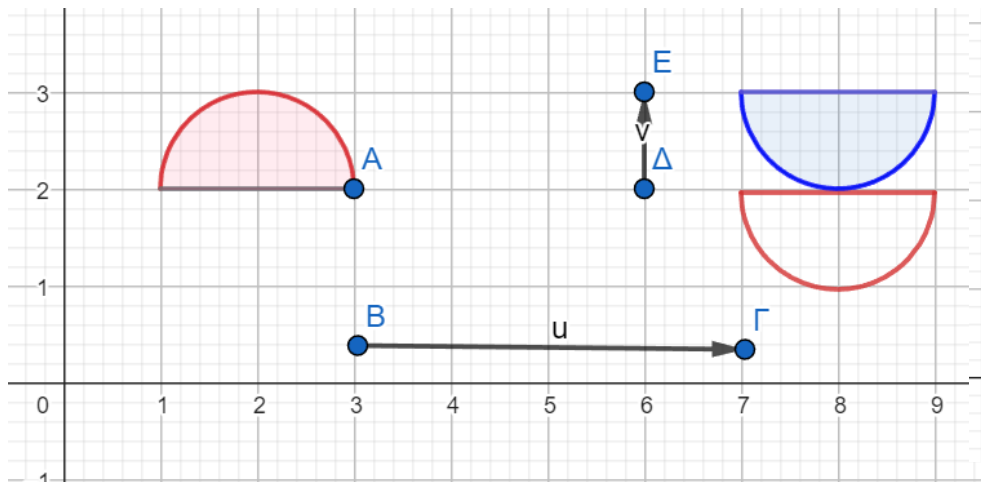
Το διάνυσμα $\vec{u}$ μπορεί να σχεδιαστεί στη geogebra με την εντολή $Vector(B, \Gamma)$.

Μεταφορά
κατά διάνυσμα

Συνέχεια του σεναρίου 1

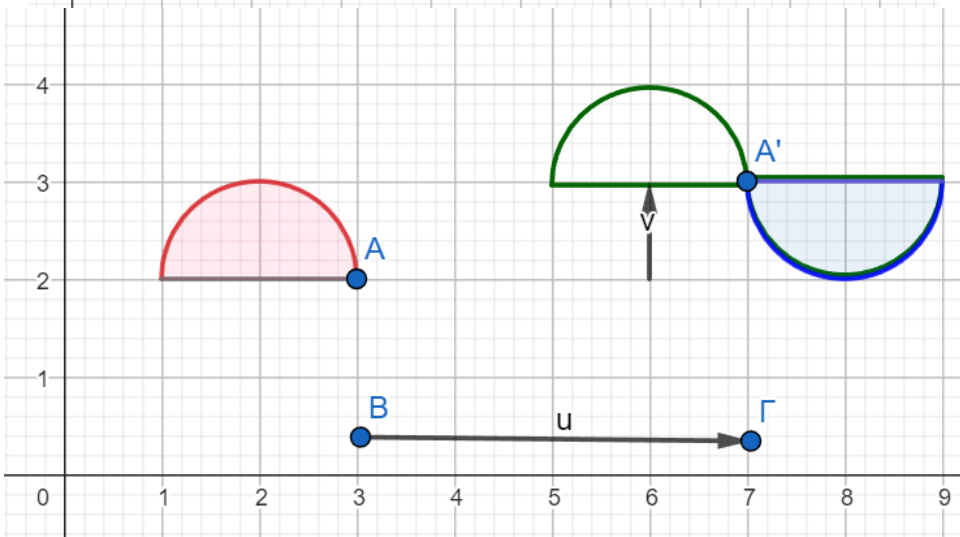
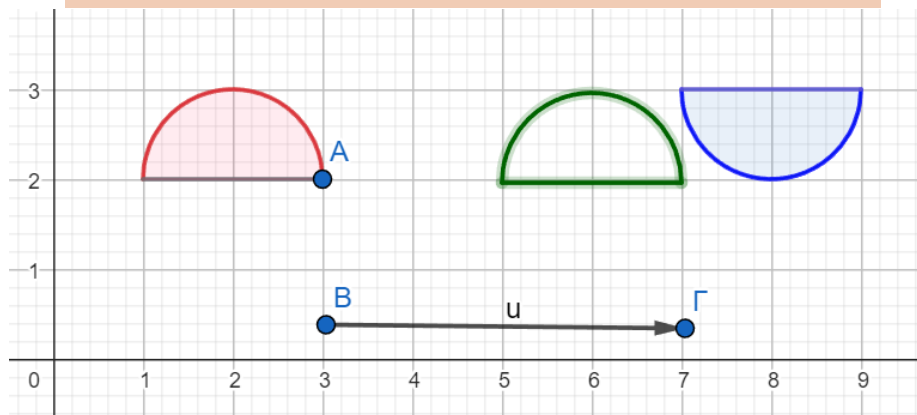


Στη συνέχεια μεταθέτουμε κάθετα σε μήκος που ορίζεται από το διάνυσμα.



Εναλλακτικά σενάρια για να μετακινηθεί το Σχήμα 1 στη θέση του Σχήματος 2

Πρώτα οι μεταθέσεις



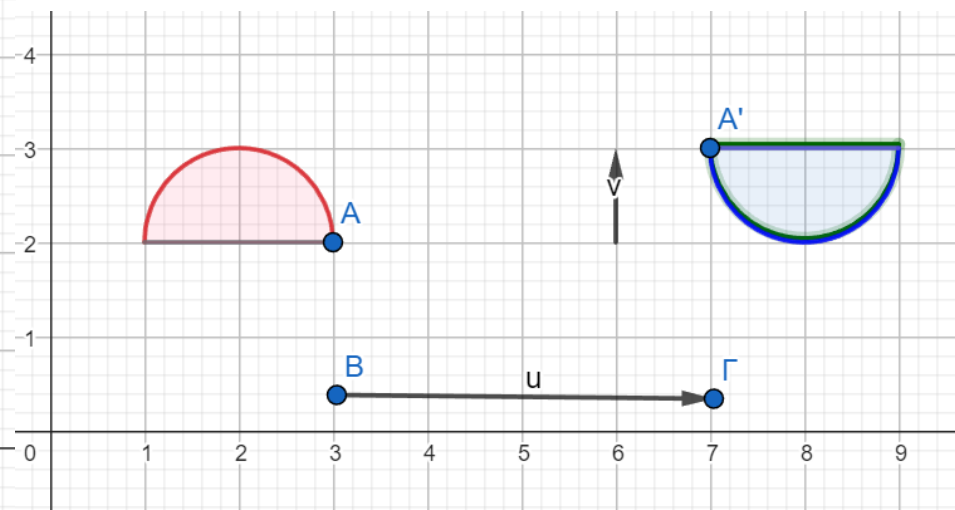
Μετά η στροφή

Η στροφή μπορεί να πραγματοποιηθεί γύρω από το σημείο A' με το εργαλείο



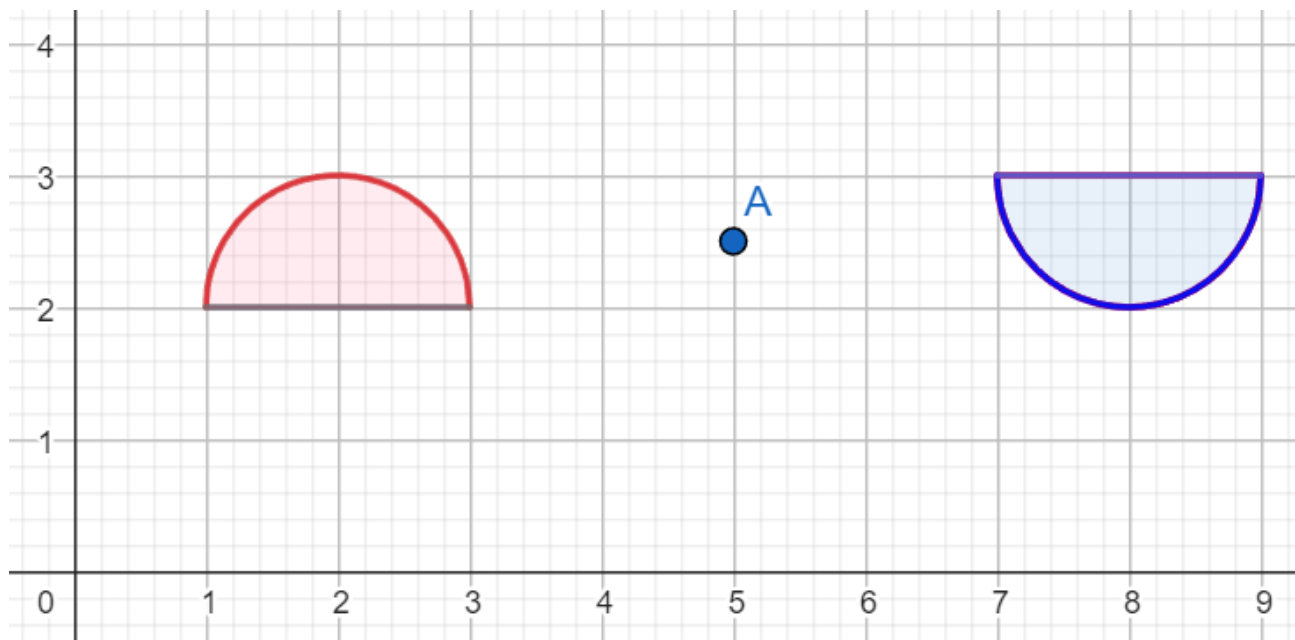
Στροφή
Αντικειμένου

αφού συμπεριλάβουμε
τα αντικείμενα εντός
ορθογώνιας περιοχής.

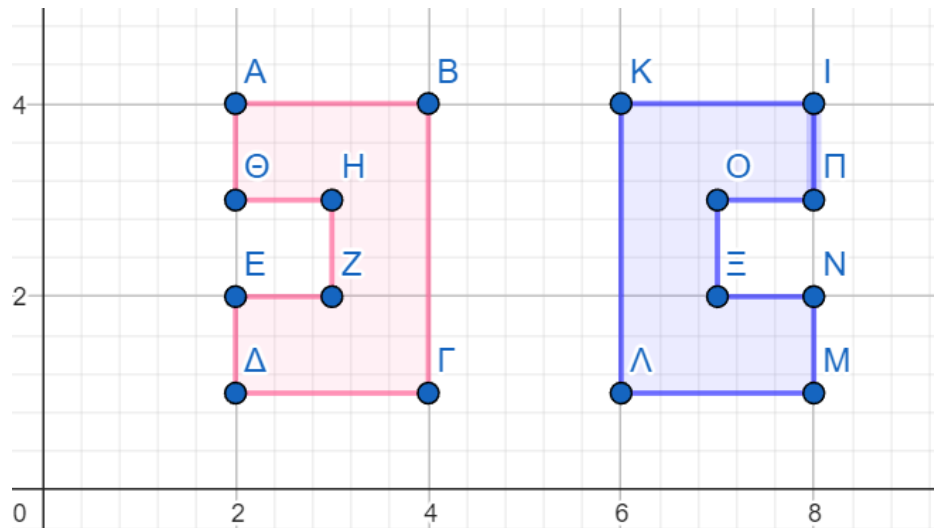


Συμπέρασμα: Είτε πραγματοποιηθεί πρώτα η στροφή και κατόπιν οι μεταθέσεις είτε πρώτα οι μεταθέσεις και κατόπιν η στροφή το αποτέλεσμα είναι ίδιο. Ισχύει δηλαδή η **αντιμεταθετικότητα** στους παραπάνω μετασχηματισμούς.

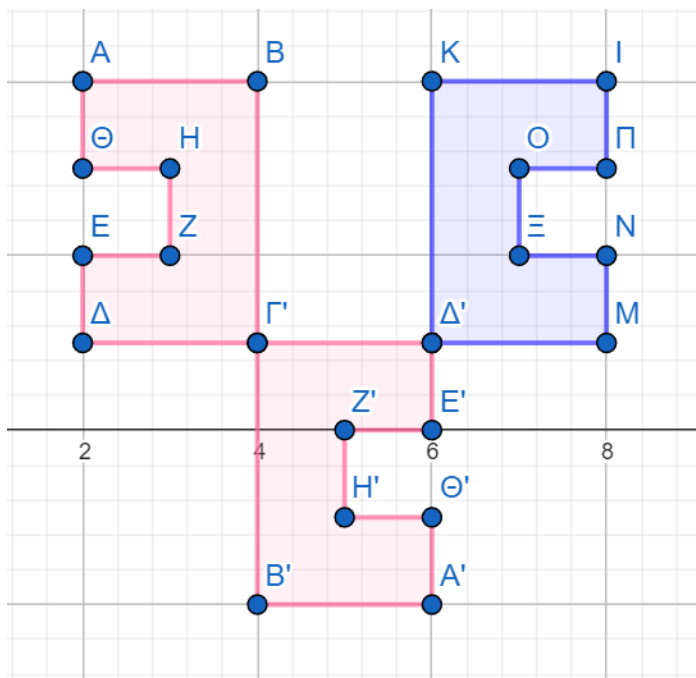
Μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα εφαρμόζοντας μόνο στροφή ως προς κατάλληλο σημείο.



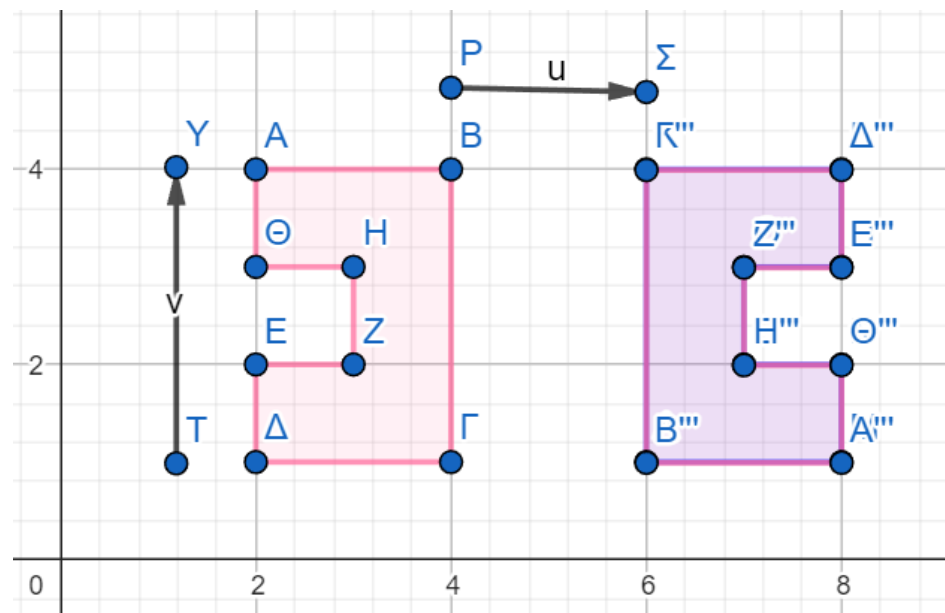
Άλλο παράδειγμα



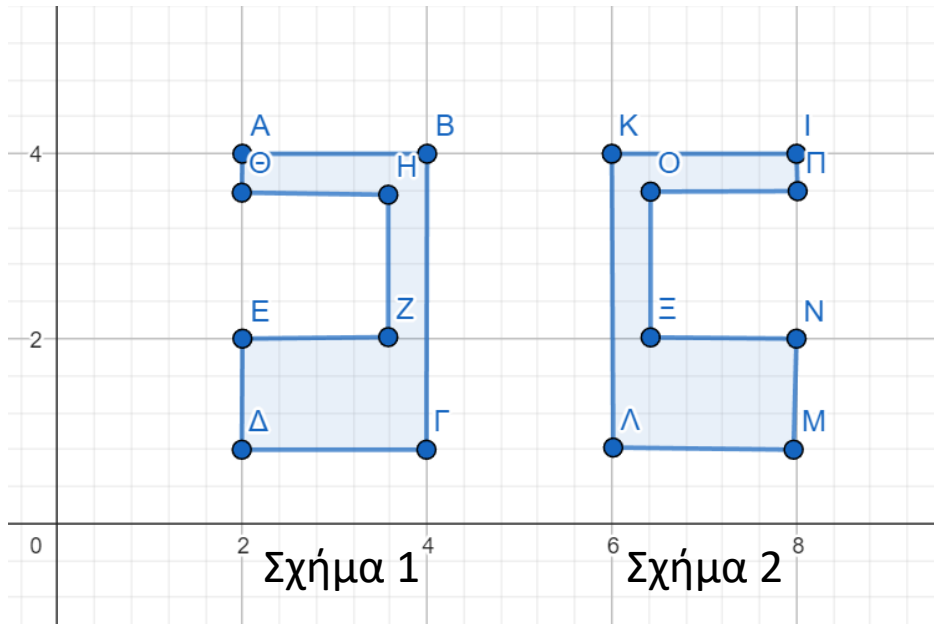
Μετά από στροφή



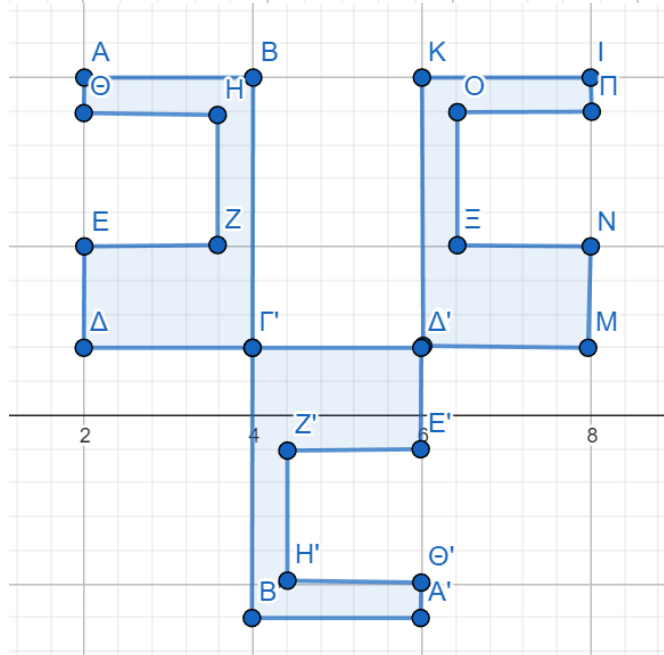
Μετά από μετάθεση



Άλλο παράδειγμα

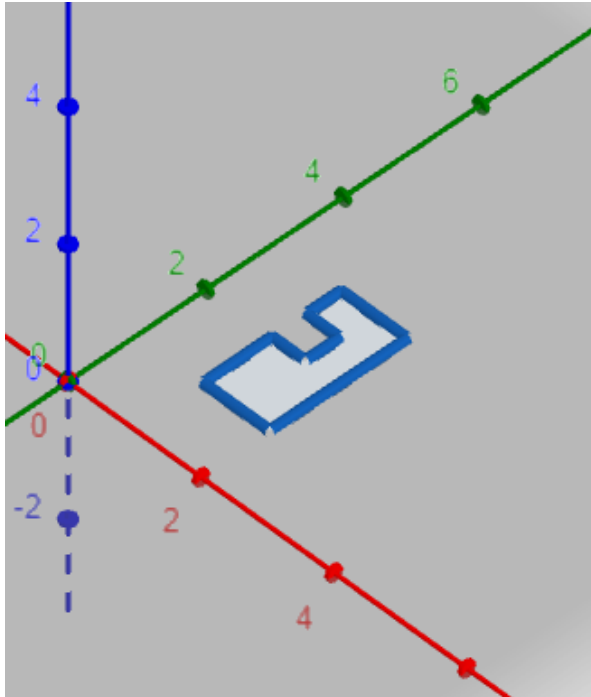


Μπορεί το Σχήμα 2 να προκύψει εφαρμόζοντας αποκλειστικά μετασχηματισμούς στροφής και μετάθεσης στο Σχήμα 1;

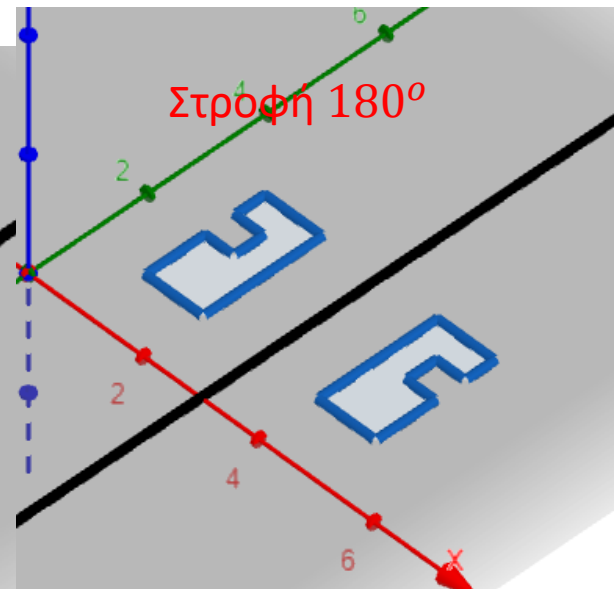
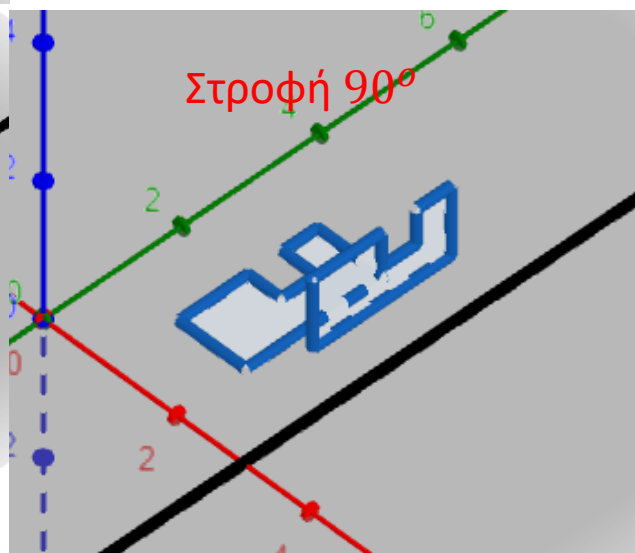
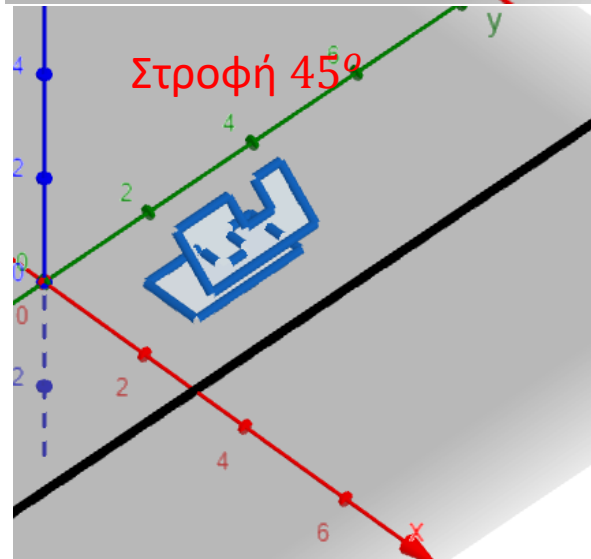
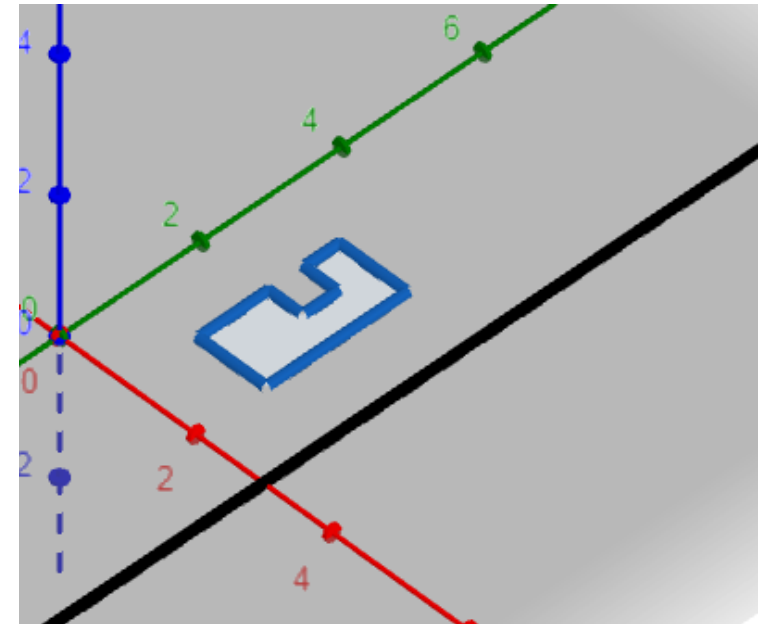


Είναι εμφανές ότι αυτό δεν μπορεί να συμβεί αφού το σχήμα μετά τη στροφή δεν μπορεί να ταυτιστεί με μεταθέσεις με το Σχήμα 2.

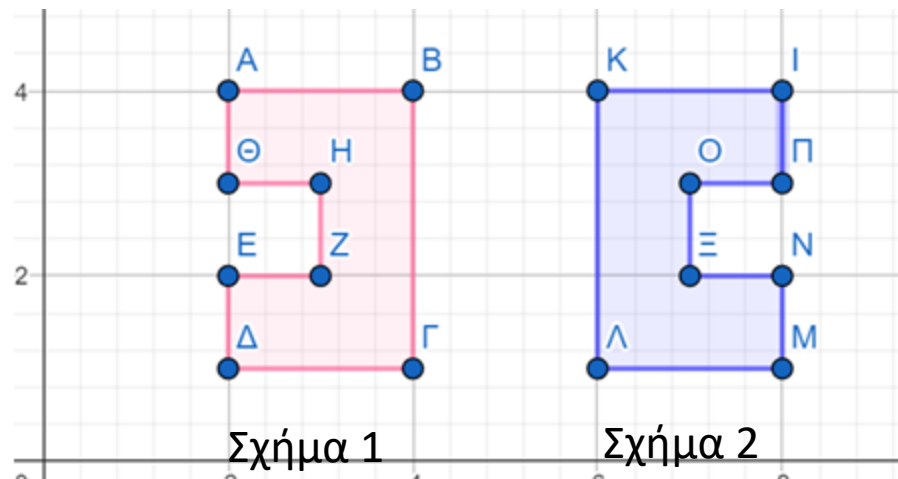
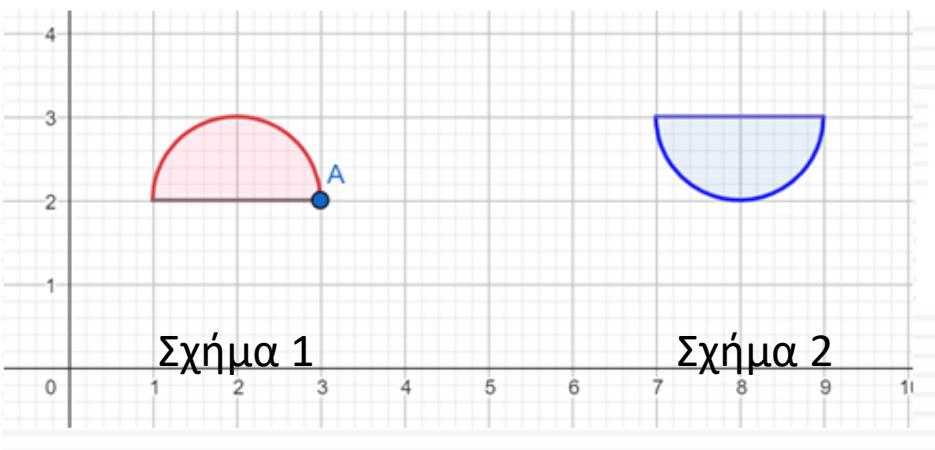
Απεικόνιση στον 3διαστατο χώρο



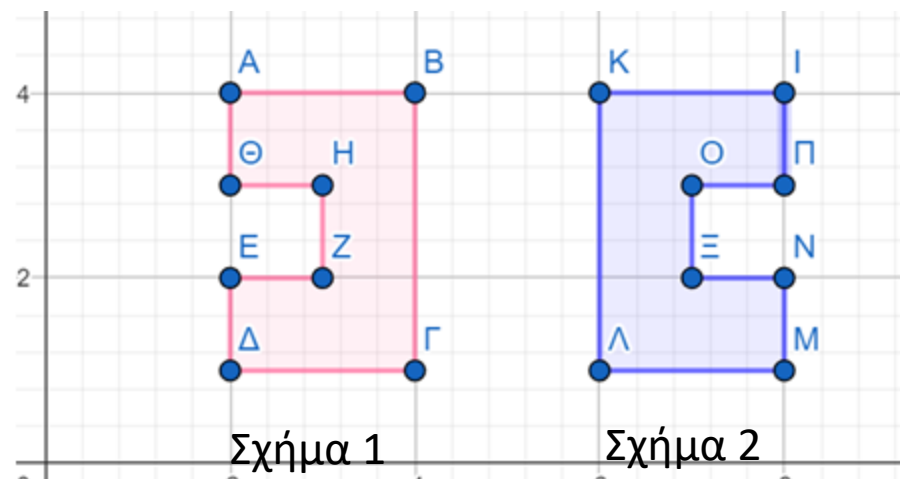
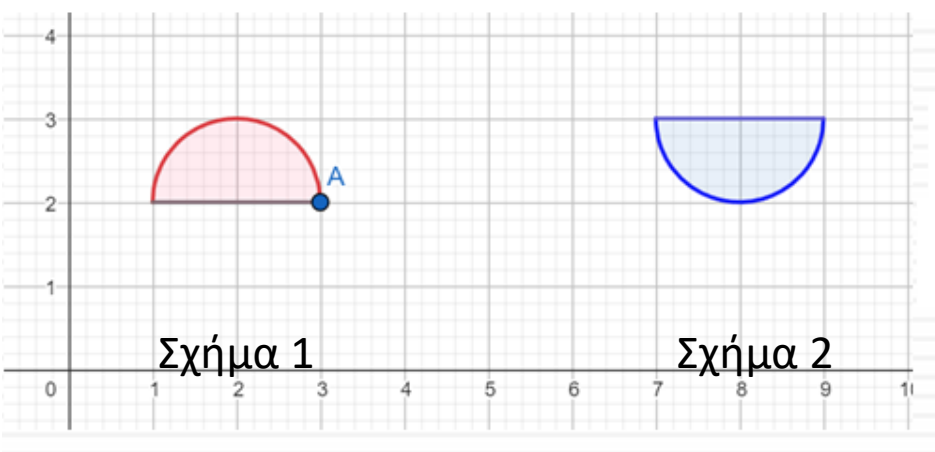
Θα πραγματοποιήσουμε
στροφή γύρω από
ευθεία που βρίσκεται
στο επίπεδο xy .
Μόνο στον 3διάστατο
χώρο είναι εφικτή η
ταύτιση με το Σχήμα 2.



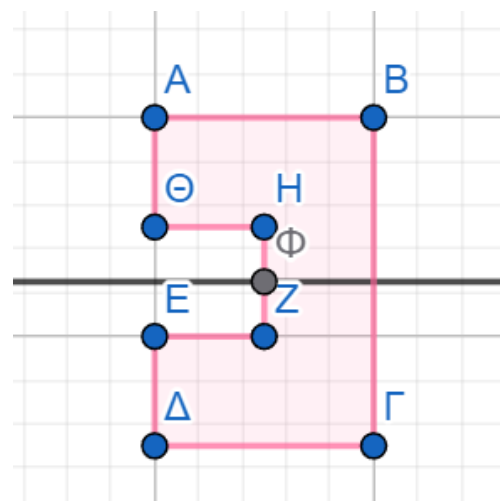
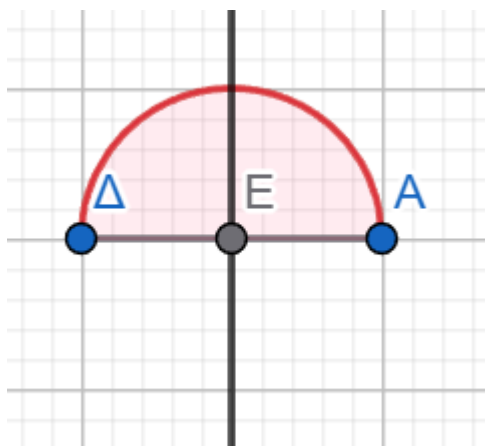
Γιατί είναι δυνατόν μετά από στροφή και μετάθεση του πρώτου σχήματος να καταλήξουμε στο δεύτερο σχήμα στις 2 παρακάτω περιπτώσεις;



Γιατί είναι δυνατόν μετά από στροφή και μετάθεση του πρώτου σχήματος να καταλήξουμε στο δεύτερο σχήμα στις 2 παρακάτω περιπτώσεις;

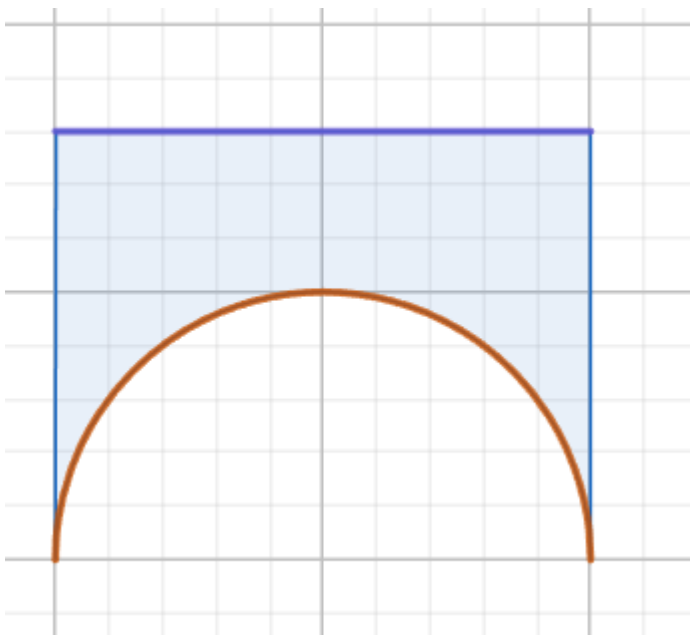


Αυτό συμβαίνει επειδή τα παρακάτω σχήματα έχουν άξονα συμμετρίας.



Αν κάθε τετραγωνάκι είναι 1 τ.μ. να εκτιμήσετε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής. Μεταξύ ποιων τιμών θεωρείτε ότι βρίσκεται το εμβαδόν; Αν γνωρίζετε ότι η κόκκινη γραμμή είναι τόξο κύκλου τι θα κάνατε για να υπολογίσετε ακριβώς το εμβαδόν της περιοχής;

Εκτίμηση του εμβαδού βάζοντας κάτω και άνω φράγματα.



Για να θέσουμε κάτω φράγματα εφαρμόζοντας τη θεωρία μέτρου επιλέγουμε **μη επικαλυπτόμενα τετράγωνα** που ανήκουν στο **εσωτερικό του χωρίου**.

Ένα κάτω φράγμα (δηλαδή το πραγματικό εμβαδόν είναι πάνω ή ίσο με αυτήν την τιμή) είναι 36 τ.μ..

Για να θέσουμε άνω φράγματα εφαρμόζοντας τη θεωρία μέτρου επιλέγουμε **μη επικαλυπτόμενα τετράγωνα** που ανήκουν στο **εσωτερικό του χωρίου και περιλαμβάνουν το σύνορο** (υπερκαλύπτουμε το χωρίο που μας ενδιαφέρει).

Ένα άνω φράγμα (δηλαδή το πραγματικό εμβαδόν είναι κάτω ή ίσο με αυτήν την τιμή) είναι 46 τ.μ.

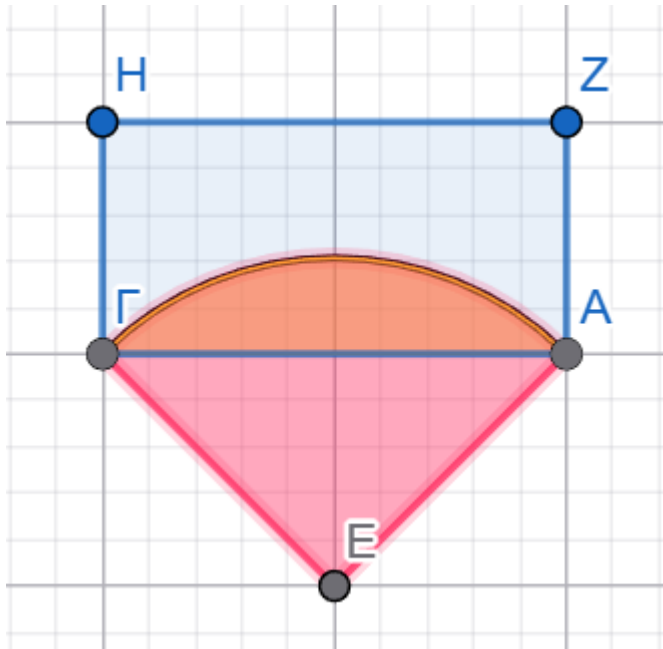
Επομένως $36 \leq E \leq 46$.

Ακριβής υπολογισμός (προσέγγιση λόγω π): Αφαιρούμε από το εμβαδόν του ορθογωνίου το εμβαδόν του μισού κυκλικού δίσκου.

$$10 \cdot 8 - \frac{1}{2} \pi \cdot 5^2 = 80 - 3,14 \cdot 25/2 = 80 - 39,25 = 40,75.$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή του εμβαδού βρίσκεται όντως μεταξύ των φραγμάτων που εκτιμήσαμε.

Αν κάθε τετραγωνάκι είναι 1 τ.μ. να εκτιμήσετε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης γαλάζιας περιοχής. Μεταξύ ποιων τιμών θεωρείτε ότι βρίσκετε το εμβαδόν; Αν γνωρίζετε ότι η κόκκινη γραμμή είναι τόξο κύκλου 90° τι θα κάνατε για να υπολογίσετε ακριβώς το εμβαδόν της περιοχής;



Ένα κάτω φράγμα είναι 28 τ.μ.

Ένα άνω φράγμα είναι 42 τ.μ.

Επομένως $28 \leq E \leq 42$.

Για να υπολογίσουμε τη γαλάζια περιοχή θα πρέπει να αφαιρέσουμε τον κυκλικό τομέα.

Για να τον βρούμε μπορούμε να ακολουθήσουμε διαφορετικές στρατηγικές.

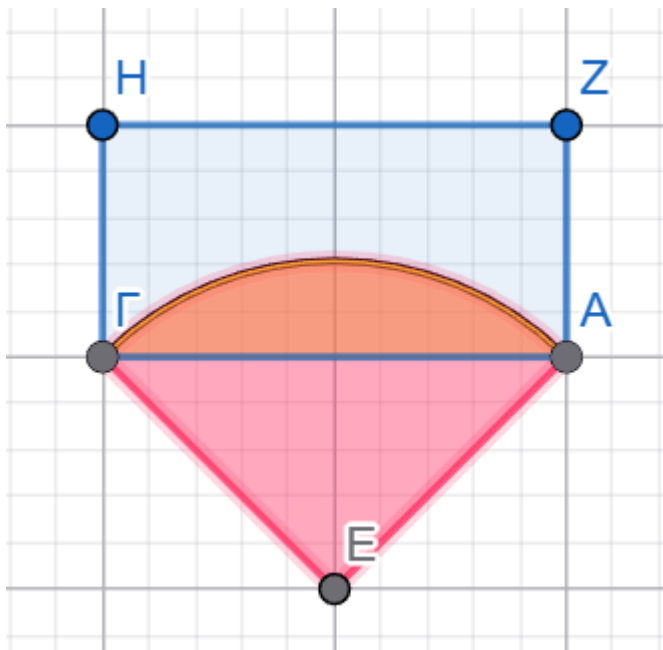
1^η στρατηγική:

Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν του τεταρτοκύκλιου E_Q .

$$\text{Ακτίνα κύκλου} = 5\sqrt{2} \text{ μ.} \quad E_Q = \frac{1}{4} \pi \cdot 50 = 12,5\pi \text{ τ.μ.}$$

Θα αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΕ

Συνέχεια 1^{ης} στρατηγικής



ΑΓΕ ισοσκελές

Το ύψος από μέτρηση είναι 5 μ.

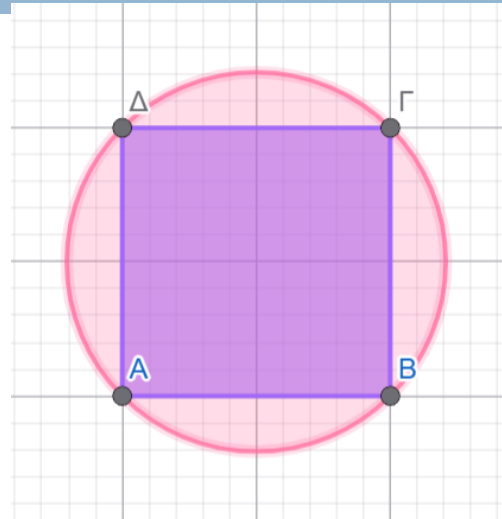
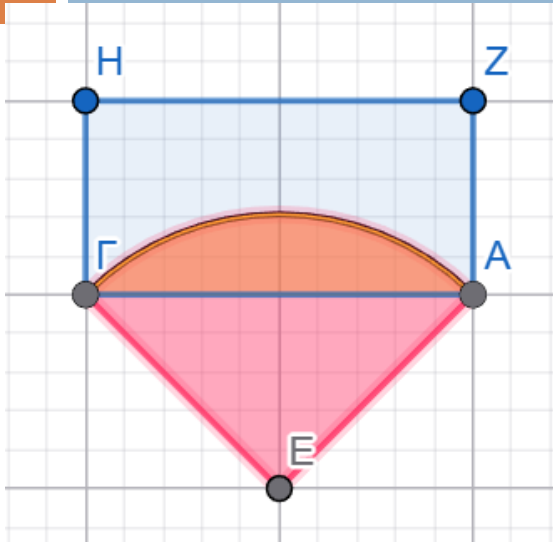
$$E_{\text{ΑΓΕ}} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25 \text{ τ.μ.}$$

Το εμβαδόν του **πορτοκαλί κυκλικού τμήματος** είναι $E_{\tau} = 39,25 - 25 = 14,25 \text{ τ.μ.}$

Για να υπολογίσουμε **το γαλάζιο τμήμα** αφαιρούμε από το εμβαδόν του ορθογωνίου το κυκλικό τμήμα $E = 50 - 14,25 = 35,75 \text{ τ.μ.}$

Παρατηρούμε ότι επαληθεύεται η εκτίμηση μας
 $28 \leq 35,75 \leq 42$

Εκμεταλλευόμενοι τη συμμετρία



Παρατηρούμε ότι ο κυκλικός τομέας ΑΓΕ είναι το $\frac{1}{4}$ του κύκλου.

$$\text{Ακτίνα}_{\text{κύκλου}} = 5\sqrt{2} \mu.$$

$$E_{\text{κύκλου}} = 50\pi \text{ τ. μ.}$$

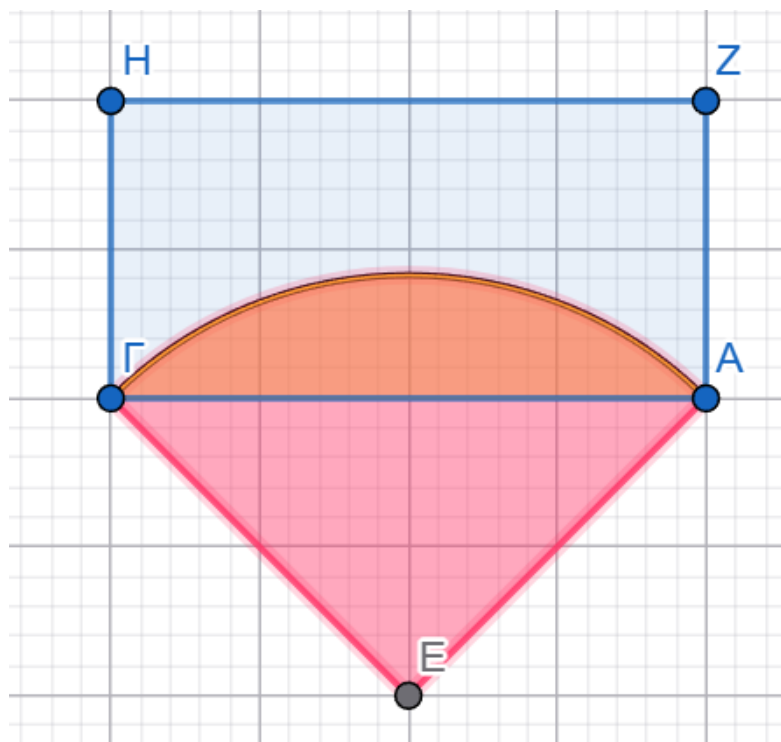
Αφαιρούμε το μοβ τετράγωνο από το εσωτερικό του κύκλου, οπότε προκύπτουν τα 4 ροζ εμβαδά των κυκλικών τμημάτων.

$$\text{Πλευρά}_{\text{τετ}} = 10 \mu.$$

$$\text{Άρα } E_{\text{κ.τμημα}} = \frac{1}{4} (50\pi - 100) = 14,25 \text{ τ.μ.}$$

Λεπταίνοντας τη διαμέριση

Κάθε τετραγωνάκι έχει το μισό μήκος πλευράς σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση. Επομένως το εμβαδόν των μικρών τετραγώνων είναι $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$ τ.μ.



Καταμετρώντας τετραγωνάκια εντός του χωρίου βρίσκουμε 128.

Ένα κάτω φράγμα για το εμβαδόν είναι $128 \cdot 0,25 = 32$ τ.μ.

Καταμετρώντας τετραγωνάκια που ανήκουν στο εσωτερικό του χωρίου και περιλαμβάνουν το σύνορο του βρίσκουμε 160.

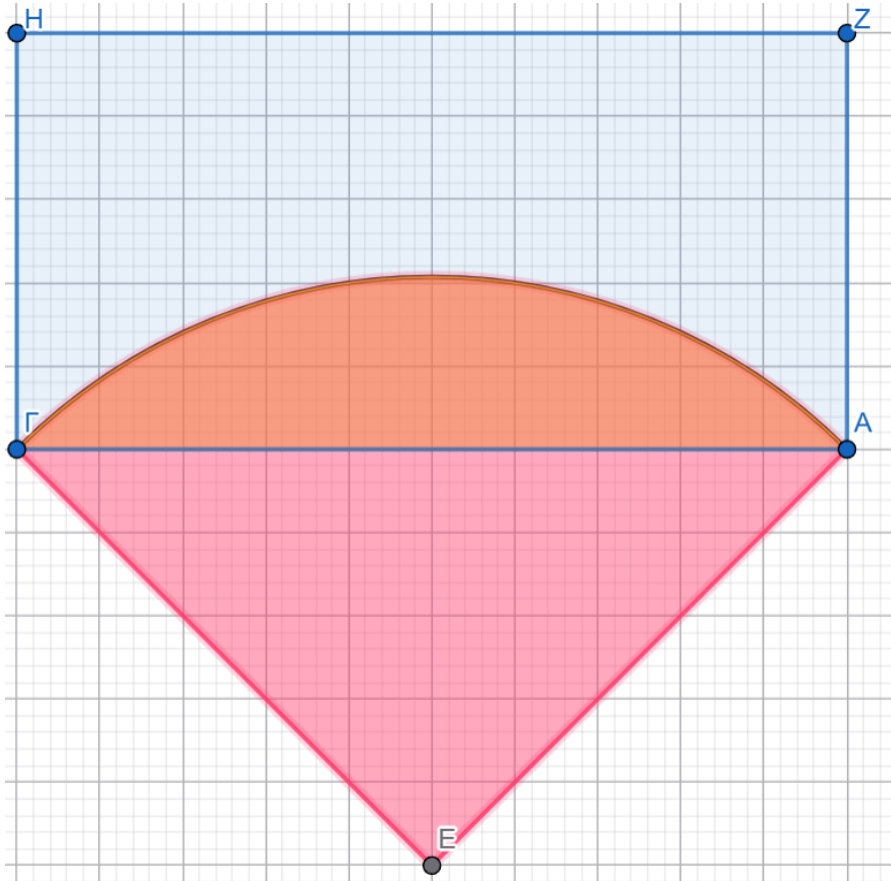
Ένα άνω φράγμα για το εμβαδόν είναι $160 \cdot 0,25 = 40$ τ.μ.

Ερ. Τι παρατηρούμε σε σχέση με την προηγούμενη εκτίμηση;

Απ. Έχει περιοριστεί το διάστημα που ορίζουν τα φράγματά μας.

$$28 < 32 \leq 35,75 \leq 40 < 42$$

Λεπταίνοντας ακόμα περισσότερο τη διαμέριση



Ερ. Τι περιμένουμε να συμβεί με τις εκτιμήσεις μας όσο λεπταίνουμε τη διαμέριση;

Απ. Το κάτω φράγμα θα μεγαλώσει και το άνω φράγμα θα μικρύνει περιορίζοντας το διάστημα τιμών που μπορεί να ανήκει η πραγματική τιμή του εμβαδού του χωρίου.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Brousseau, G. (1997). The theory of didactic situations in mathematics. Dortrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Chevallard, Y. (1989). On didactic transposition theory: some introductory notes International Symposium on Research and Development in Mathematics Education (pp. 51-62). Bratislava.
- Dienes, Z. (1971). Building up mathematics (4th edition). London, UK: Educational Ltd.
- Douady, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en didactique des mathématiques, 7(2), 5-31.
- Kang, W., & Kilpatrick, J. (1992). Didactic transposition in mathematics textbooks. For the Learning of Mathematics, 12(1), 2-7
- Laczkovich, M., & Sós, V.T. (2017). Real Analysis: Series, Functions of Several Variables, and Applications. New York: Springer.
- Piaget, J., & Cook, M. T. (1952). The origins of intelligence in children. New York, NY: International University Press.
- Vergnaud, G. (1982). Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematics Education: some theoretical and methodological issues. For the Learning of Mathematics, 3(2), 31-41.
- Wertheimer, M. (1945). Productive thinking. NewYork: Harper.

ΣΑΣ ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΑΣ!